अध्याय 14

दोलन

14.1 भूमिका
14.2 दोलन और आवर्ती गति
14.3 सरल आवर्त गति
14.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति
14.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण
14.6 सरल आवर्त गति के लिए बल नियम
14.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा
14.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय
14.9 अवमंदित सरल आवर्त गति
14.10 प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास
अतिरिक्त अभ्यास

14.1 भूमिका

हम अपने दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की गतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ जैसे सरल रैखिक गति और किसी प्रक्षेप्य की गति के विषय में तो आप अध्ययन कर ही चुके हैं। ये दोनों ही गतियाँ अनावर्ती होती हैं। हमने एकसमान वर्तुल गति तथा सौर परिवार में ग्रहों की कक्षीय गतियों के विषय में भी अध्ययन कर लिया है। इन उदाहरणों में निश्चित समय-अंतराल के पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात् यह आवर्ती होती है। आपने बचपन में अपने पालने अथवा झूले पर झूलने का आनन्द लिया होगा। यह दोनों गतियाँ पुनरावर्ती होती हैं, परंतु किसी ग्रह की आवर्ती गति से भिन्न होती हैं। यहाँ वस्तु किसी माध्य स्थिति के इधर-उधर गति करती है। दीवार-घड़ी का लोलक भी इसी प्रकार की गति करता है वृक्ष की टहनियों और पत्तियों का हवा में दोलन, लंगर पर इधर-उधर हिलती नावें तथा कारों के इंजनों में दोलायमान पिस्टन, ये सभी वस्तुएँ अग्र-पश्च (आगे-पीछे) आवर्ती गति का निष्पादन करती हैं। इस प्रकार की गति को **दोलन गति** कहते हैं। इस अध्याय में हम इस गति के बारे में अध्ययन करेंगे।

दोलन गति का अध्ययन भौतिकी के लिए आधारभूत है; बहुत-सी भौतिक परिघटनाओं को समझने के लिए इसकी संकल्पना की आवश्यकता होती है। वाद्य यंत्रों; जैसे-सितार, गिटार अथवा वायलिन में हम कंपायमान डोरियों द्वारा रोचक ध्वनियाँ उत्पन्न होते हुए देखते हैं। ढोलों में झिल्लियाँ तथा टेलीफोन और ध्वनि विस्तारकों के स्पीकरों में डायफ्राम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन करते हैं। वायु के अणुओं के कंपनों द्वारा ही ध्वनि-संचरण संभव हो पाता है। इसी प्रकार, ठोसों के अणु अपनी माध्य स्थितियों के परित: दोलन करते हैं और ताप-संवेदन पहुँचाते हैं। रेडियो, टी.वी. तथा उपग्रहों के ट्रांसमीटरों के एन्टेना में हो रहे इलेक्ट्रॉनों के दोलनों द्वारा सूचना-संचरण संभव हो पाता है।

किसी आवर्ती गति के व्यापक तथा दोलन गति के विशेष विवरण के लिए कुछ मूल संकल्पनाओं; जैसे—आवर्तकाल, आवृत्ति, विस्थापन, आयाम और कला की आवश्यकता होती है। अगले अनुभाग में इन संकल्पनाओं को विकसित किया गया है।

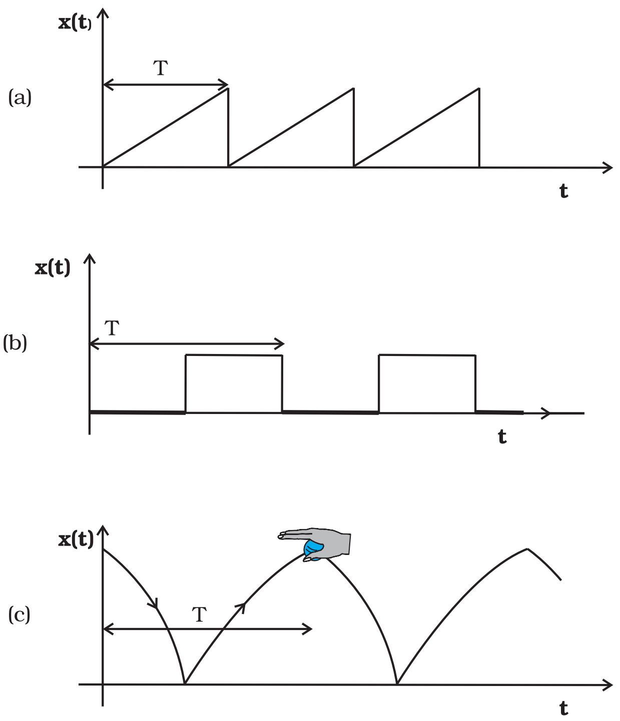
14.2 दोलन और आवर्ती गति

चित्र 14.1 में कुछ आवर्ती गतियाँ दर्शाई गई हैं। मान लीजिए कोई कीट किसी रैम्प पर चढ़ता है और गिर जाता है। वह अपने प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है और इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराता है। यदि आप जमीन से ऊपर इसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ खींचें तो यह चित्र 14.1(a) की तरह दिखेगा। यदि कोई बालक किसी सीढ़ी पर चढ़े और उतरे तथा इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराये तो उसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ चित्र 14.1(b) के जैसा दिखेगा। जब आप किसी गेंद को अपनी हथेली से जमीन की तरफ बार-बार मारते हैं तो इसकी ऊँचाई और समय के बीच ग्राफ 14.3(c) के जैसा दिखेगा। ध्यान दीजिए कि चित्र 14.1(c) में दोनों वक्रीय भाग न्यूटन की गति समीकरण के अनुसार परवलय के अंश हैं, अनुभाग (3.6) देखिए।

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ अधोमुखी गति के लिए, तथा

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ उपरिमुखी गति के लिए,

इन समीकरणों में u का मान अलग परिस्थितियों के लिए भिन्न होगा। ये सभी आवर्ती गति के उदाहरण हैं। अत: कोई गति जो निश्चित अंतराल के बाद पुनरावृत्ति करती है ***आवर्ती गति*** कहलाती है।



चित्र 14.1 *आवृत्ति गति के उदाहरण। प्रत्येक अवस्था में आवर्तकाल T दर्शाया गया है।*

सामान्यत: आवर्ती गति करने वाले पिण्ड की एक संतुलन अवस्था होती है जो उसके गति के पथ में स्थित होता है। जब पिण्ड इस संतुलन अवस्था में होता है तो उस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है। अत: यदि पिण्ड को इस अवस्था में विराम की स्थिति में छोड़ दें तो यह सदैव विरामावस्था में रहेगा। यदि पिण्ड को इस अवस्था से थोड़ा सा विस्थापित करें तो पिण्ड पर एक बल कार्य करने लगता है जो पिण्ड को पुन: उसकी संतुलन-अवस्था की ओर ले जाने का प्रयास करता है और फलस्वरूप पिण्ड में **दोलन** या **कंपन** उत्पन्न हो जाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कटोरे में एक गेंद रख दें तो गेंद कटोरे की तली पर संतुलन अवस्था में होती है। यदि इसको इस बिंदु से थोड़ा विस्थापित करें तो गेंद कटोरे में दोलन करने लगती है। प्रत्येक दोलन गति आवर्ती होती है परंतु प्रत्येक आवर्ती गति दोलनीय नहीं होती। वर्तुल गति भी आवर्ती होती है, परंतु दोलनीय नहीं होती है।

दोलन एवं कंपन में कोई मुख्य अंतर नहीं है। साधारणत: जब आवृत्ति का मान कम होता है तो हम गति को दोलनीय कहते हैं (जैसे किसी वृक्ष की टहनी की दोलन गति)। इसके विपरीत जब गति की आवृत्ति अधिक होती है तो हम गति को कंपन कहते हैं। जैसे किसी संगीत वाद्य के तार का कंपन।

सरल आवर्ती गति दोलनीय गति का एक सरल रूप है। यह तब होता है जब किसी दोलनीय वस्तु के ऊपर लगने वाला बल संतुलन अवस्था में इसके विस्थापन के समानुपाती होता है। पुन: वस्तु के दोलन के दौरान यह बल सदैव इस संतुलन अवस्था की तरफ निदेशित होता है। यह संतुलन अवस्था वस्तु की गति की माध्य स्थिति भी होती है।

व्यावहारिक रूप में सभी दोलनीय वस्तुएँ अंततोगत्वा अपनी संतुलन अवस्था को प्राप्त कर लेती हैं। क्योंकि इनकी गति में घर्षण तथा अन्य क्षयकारी बलों के कारण अवमंदन उत्पन्न होता है। परंतु कोई बाह्य आवर्ती बल लगाकर हम वस्तु को दोलनीय अवस्था में रख सकते हैं। इस पाठ के अंतिम अनुभागों में हम अवमंदित तथा प्रणोदित दोलनों का अध्ययन करेंगे।

किसी भी द्रव्यात्मक माध्यम को हम युग्मित दलित्रों का एक बड़ा समूह मान सकते हैं। इन दलित्रों के सामूहिक दोलन तरंग का रूप लेते हैं। जल तरंग, भूकम्पित तरंगें, विद्युत चुंबकीय तरंगें इन तरंगों के उदाहरण हैं। तरंगीय घटनाओं के विषय में हम अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे।

14.2.1 आवर्तकाल तथा आवृत्ति

हमने देखा है कि कोई गति जिसकी किसी नियमित समय अंतराल पर स्वयं पुनरावृत्ति होती है **आवर्ती गति** कहलाती है। ***वह न्यूनतम समय अंतराल जिसके पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, इसका आवर्तकाल कहलाता है।*** अत: समय को हम

T द्वारा दर्शाते हैं। इसका SI मात्रक सेकंड है । उन आवर्ती गतियों के लिए, जो सेकंडों के पैमाने पर या तो बहुत तीव्र अथवा बहुत मंद होती हैं, समय के अन्य सुविधाजनक मात्रक उपयोग में लाए जाते हैं । किसी क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का कंपन काल माइक्रोसेकंड (10^{-6} s) के मात्रकों, जिसका प्रतीक μs है, में व्यक्त किया जाता है । इसके विपरीत बुध ग्रह की कक्षीय अवधि 88 भू-दिवस होती है। हेली धूमकेतु हर 76 वर्ष के पश्चात् पुन: दृष्टिगोचर होता है।

आवर्तकाल 'T के व्युत्क्रम से हमें प्रति इकाई समय में दोलनों की संख्या प्राप्त होती है । यह राशि **आवर्ती गति की आवृत्ति** कहलाती है । इसे प्रतीक υ द्वारा निरूपित किया जाता है । ν तथा T के मध्य निम्नलिखित पारस्परिक संबंध होता है:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (14.1)$$

इस प्रकार ν का मात्रक (s^{-1}) है । रेडियो तरंगों के आविष्कारक हेनरिख रुडोल्फ हर्ट्ज़ (1857-1894) के नाम पर आवृत्ति के मात्रक को एक विशेष नाम दिया गया । इसे हर्ट्ज़ (hertz प्रतीक Hz) कहते हैं । इस प्रकार,

$$1 \text{ हर्ट्ज़} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ दोलन प्रति सेकंड} = 1 s^{-1} \qquad (14.2)$$

ध्यान दीजिए, आवृत्ति का सदैव ही पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है।

▶ ***उदाहरण 14.1*** कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है । इसकी आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए ।

हल हृदय की धड़कन की आवृत्ति = 75/(1 मिनट)

= 75/(60 s)

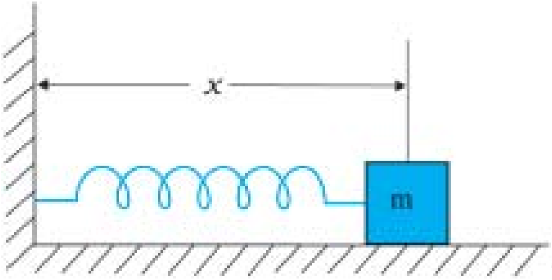
= 1.25 s^{-1}

आवर्तकाल, T = 1/(1.25 s^{-1})

= 0.8 s ◀

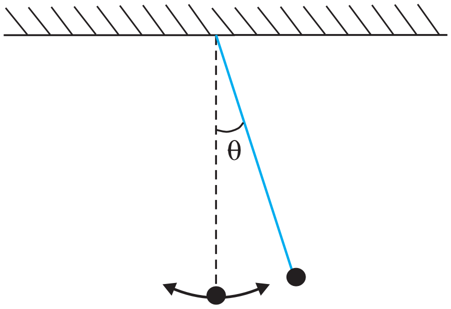
14.2.2 विस्थापन

अनुभाग 4.2 में हमने किसी कण के विस्थापन को उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया था । इस अध्याय में हम विस्थापन नामक इस पद का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में करेंगे । यह किसी भी विचारणीय भौतिक गुण में समय के साथ परिवर्तन को निरूपित करेगा । उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ पर किसी स्टील बॉल की सरल रेखीय गति के लिए, समय के फलन के रूप में आरंभ बिंदु से बॉल की दूरी इसका **स्थिति-विस्थापन** है । मूल बिंदु का चुनाव सुविधानुसार किया जा सकता है । मान लीजिए कोई गुटका किसी कमानी से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है [देखिए चित्र 14.2 (a)] साधारणत: किसी पिण्ड का विस्थापन इसकी संतुलन अवस्था से मापना सरल होगा। किसी दोलायमान



चित्र 1.4.2(a) *कोई गुटका किसी कमानी से संलग्न, जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है । गुटका घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है । गुटके की गति को दीवार से दूरी, अथवा विस्थापन x के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।*

सरल लोलक के लिए, समय के फलन के रूप में ऊर्ध्वाधर से कोण को विस्थापन-चर के रूप में निरूपित किया जा सकता है [देखिए चित्र 14.2(b)]। 'विस्थापन' पद का उल्लेख सदैव स्थिति के संदर्भ में ही नहीं किया जाता। विस्थापन चर कई अन्य प्रकार के भी हो सकते हैं । किसी



चित्र 14.2(b) *एक दोलायमान सरल लोलक, इसकी गति को ऊर्ध्वाधर से कोणीय विस्थापन θ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।*

a.c. परिपथ में संयोजित संधारित्र के सिरों के बीच समय के साथ परिवर्तित हो रही "वोल्टता" को भी एक विस्थापन चर के रूप में लिया जा सकता है । इसी प्रकार, ध्वनि तरंगों के संचरण में समय के साथ 'दाब' में परिवर्तन, प्रकाश तरंगों में परिवर्तित हो रहे वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र अन्य संदर्भो में विस्थापन के उदाहरण हैं। विस्थापन चर का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। दोलनों के प्रयोगों में, समयों के लिए विस्थापन चरों की माप ली जाती है ।

विस्थापन को सदैव ही समय के गणितीय फलन द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आवर्ती गतियों में यह फलन समय का आवर्ती होता है । आवर्ती फलनों में से एक सरलतम आवर्ती फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

$$f(t) = A\cos\omega t \qquad (14.3a)$$

यदि इस फलन के कोणांक, ωt, में 2π रेडियन या इसके किसी पूर्णांक गुणज की वृद्धि कर दी जाए, तो फलन का मान वही f रहता है । तब भी फलन $f(t)$ आवर्ती ही रहता है जिसका आवर्तकाल, T निम्नलिखित होगा,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (14.3b)$$

अत: कोई फलन $f(t)$ काल T का आवर्ती होता है,

$$f(t) = f(t+T)$$

यदि हम ज्या (sin) फलन, $f(t) = A\sin\omega t$ भी लें तो स्पष्ट रूप से यही परिणाम सही होता है । साथ ही ज्या (sin) एवं कोज्या (cos) फलनों का एक घात संचय, जैसे

$$f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (14.3c)$$

भी आवर्ती फलन होता है, जिसका आवर्तकाल T होता है । यदि हम

$$A = D\cos\phi \text{ तथा } B = D\sin\phi$$

लें, तो समीकरण (14.3c) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(t) = D\sin(\omega t + \phi), \qquad (14.3d)$$

यहाँ अचर D और ϕ दिए गए हैं

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ तथा } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

आवर्ती ज्या और कोज्या फलनों का विशेष महत्त्व फ्रांसीसी गणितज्ञ जीन बापटिस्ट जोसेफ फूरिए (1768–1830) द्वारा सिद्ध असाधारण परिणाम के कारण है, जो इस प्रकार है : ***किसी भी आवर्ती फलन को उचित गुणांक वाले विभिन्न आवर्तकाल के ज्या व कोज्या फलनों के अध्यारोपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।***

▶ **उदाहरण 14.2** निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं ? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है] ।

(i) $\sin\omega t + \cos\omega t$

(ii) $\sin\omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

हल (i) $\sin\omega t + \cos\omega t$ एक आवर्ती फलन है। इसे $\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

अब, $\sin(\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$$= \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

इस फलन का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega}$ है ।

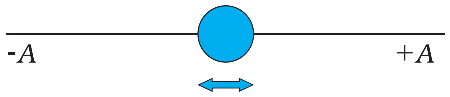
(ii) यह आवर्ती गति का एक उदाहरण है । ध्यान दीजिए, यहाँ प्रत्येक पद एक विभिन्न कोणीय आवृत्ति के आवर्ती फलन को निरूपित करता है । चूँकि आवर्तकाल वह न्यूनतम समय अंतराल होता है जिसके पश्चात् फलन अपने मान की स्वयं पुनरावृत्ति करता है, $\sin\omega t$ का आवर्तकाल $T_0 = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ का आवर्तकाल $\pi/\omega = T_0/2$; तथा $\sin 4\omega t$ का आवर्तकाल $2\pi/4\omega = T_0/4$ होता है । प्रथम पद का आवर्तकाल अंतिम दो पदों के आवर्तकालों का गुणनफल होता है। अत: अंतिम समय का निम्न अंतराल जिसके उपरांत तीनों पदों का योग पुनरावृत्ति करता है T_0 होता है जिसका आवर्त काल $2\pi/\omega$ है।

(iii) फलन $e^{-\omega t}$ अनावर्ती है, यह समय में वृद्धि के साथ एक दिष्टत: घटता है तथा $t\to\infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और इस प्रकार कभी भी अपने मान की पुनरावृत्ति नहीं करता ।

(iv) फलन $\log(\omega t)$ समय के साथ एकदिष्टत: बढ़ता है । अत: यह अपने मान की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं करता और यह एक अनावर्ती फलन है । ध्यान दीजिए, $t\to\infty$ होने पर $\log\omega t$ अपसारित होकर ∞ तक पहुँच जाता है। अत: यह किसी भी प्रकार के भौतिक विस्थापन को निरूपित नहीं कर सकता । ◀

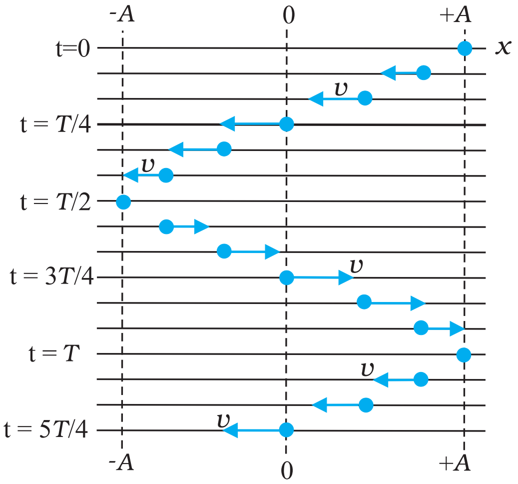
14.3 सरल आवर्त गति

आइए, अब हम चित्र 14.3 के अनुसार x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ चरम सीमाओं के मध्य अग्र और पश्च कंपन करने वाले किसी कण पर विचार करें । इन चरम स्थितियों के बीच कण इस प्रकार गति करता है कि जब यह मूल बिंदु पर होता है, तब इसकी चाल अधिकतम तथा जब यह $\pm A$ पर होता है तब इसकी चाल शून्य होती है । हम समय का चयन इस प्रकार करते हैं कि जब कण $+A$ पर होता है तब समय t शून्य लिया जाता है तथा यह $t = T$ पर $+A$ पर वापस आ जाता है । इस

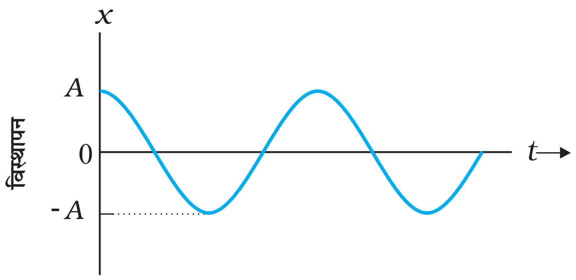


चित्र 14.3 x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ सीमाओं के भीतर अग्र और पश्च कंपन करते हुए कोई कण ।

अनुभाग में हम केवल इसी गति का वर्णन करेंगे । इस गति को किस प्रकार प्राप्त किया जाता है इसकी चर्चा बाद में करेंगे । इस कण की गति का अध्ययन करने के लिए, नियमित समय अंतरालों पर इस कण के आशु चित्र (स्नैप शाट्स) लेकर हम इसकी स्थिति को समय के फलन के रूप में अंकित करते हैं । चित्र 14.4 में इस प्रकार के आशु चित्रों का सेट दिखाया गया है । मूल बिंदु के सापेक्ष इस कण की स्थिति समय के किसी क्षण पर कण का विस्थापन बताती है । इस प्रकार की गति के लिए, सावधानीपूर्वक चुने गए किसी मूल बिंदु से कण का



चित्र 14.4 +A तथा –A सीमाओं के बीच, x-अक्ष के परितः आगे तथा पीछे (अग्र-पश्च) कंपन करते हुए किसी कण की समान समय-अंतरालों पर होने वाली स्थितियों के आशु चित्रों का एक क्रम । सदिश तीरों की लंबाई कण की चाल को इंगित करती है । कण की चाल मूल स्थान पर अधिकतम तथा +A पर शून्य है। यदि कण की –A स्थिति पर समय t को शून्य लिया जाए तो कण t = T पर +A की स्थिति पर पुनः लौटता है । यहाँ T गति का आवर्तकाल है जिस पर गति की पुनरावृत्ति होती है । यह चित्र $\phi = 0$ के लिए समीकरण (14.4) को दर्शाता है ।



चित्र 14.5 समीकरण (14.4) द्वारा निरूपित गति के लिए समय के फलन के रूप में x का ग्राफ ।

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

कला = $(\omega t + \phi)$

$x(t)$ ↑ विस्थापन; A ↑ आयाम; ω ↑ कोणीय आवृत्ति; ϕ ↑ कला स्थिरांक

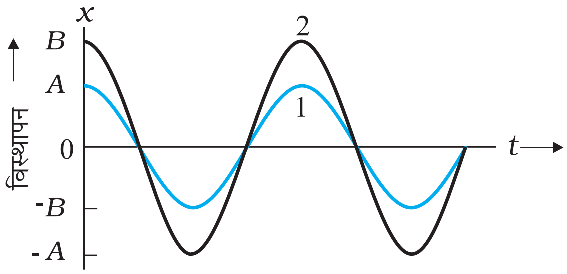
चित्र 14.6 समीकरण (14.4) में दी गई राशियों का अनुचित्र ।

विस्थापन $x(t)$ समय के साथ परिवर्तित होता है । इसे इस प्रकार दर्शाया जाता है,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

यहाँ A, ω, तथा ϕ स्थिरांक हैं ।

समीकरण (14.4) द्वारा निरूपित गति को **सरल आवर्त गति** कहते हैं । इस पद का मूल अभिप्राय है कि **आवर्ती गति समय का ज्यावक्रीय फलन है** । समीकरण (14.4), जिसमें ज्यावक्रीय फलन एक कोज्या फलन है, को चित्र 14.5 में दर्शाया गया है । वे राशियाँ जो ग्राफ की आकृति को निर्धारित करती हैं; अपने नामों के साथ चित्र 14.6 में दर्शायी गई हैं । अब हम इन राशियों की परिभाषा देंगे ।

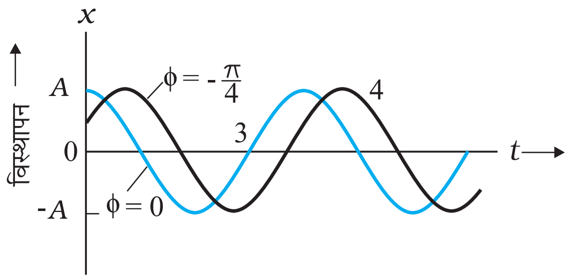


चित्र 14.7(a) समीकरण (14.4) से प्राप्त $\phi = 0$ पर समय के फलन के रूप में विस्थापन का आलेख । वक्र 1 और 2 दो भिन्न आयामों A तथा A के लिए हैं ।

राशि A गति का **आयाम** कहलाती है । यह एक धनात्मक अचर होता है जो दर्शाता है कि आयाम कण की माध्य स्थिति के किसी ओर के अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है । समीकरण (14.4) में कोज्या फलन ± 1 सीमाओं के बीच विचरण करता है, अतः विस्थापन $x(t)$ सीमाओं A के बीच विचरण करेगा । चित्र 14.7 में समीकरण (14.4) के दो विभिन्न आयामों A तथा B के लिए वक्र 1 और 2 आलेखित किए गए हैं । इन वक्रों में भिन्नता आयाम के महत्त्व को दर्शाती है।

समीकरण (14.4) में समय के साथ परिवर्तित होने वाली राशि, $(\omega t+\phi)$, गति की **कला** कहलाती है । यह किसी किए गए समय पर गति की अवस्था का वर्णन करती है । अचर ϕ

को **कला नियतांक** (अथवा **कला-कोण**) कहते हैं । ϕ का मान $t = 0$ पर कण के विस्थापन तथा कण के वेग पर निर्भर करता है । इसे चित्र 14.7 (b) द्वारा अधिक आसानी से समझा जा सकता है । इस चित्र में कला नियतांक ϕ के दो मानों के लिए दो वक्र 3 तथा 4 समीकरण (14.4) के ग्राफ को निरूपित करते हैं । यह दर्शाया जा सकता है कि कला नियतांक आरंभिक स्थितियों को प्रकट करता है ।



चित्र 14.7(b) समीकरण (14.4) से प्राप्त (x-t) आलेख । वक्र 3 तथा 4 क्रमशः कला कोण $\phi = 0$ rad तथा $\phi = -\pi/4$ rad के लिए हैं । दोनों आलेखों के लिए आयाम A समान है।

अचर ω, को गति की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं, तथा यह आवर्तकाल T से संबंधित होती है । समीकरण (14.4) से T तथा ω के बीच संबंध सरलता से प्राप्त किया जा सकता है । समीकरण (14.4) में $\phi = 0$ rad रखने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है,

$$x(t) = A\cos \omega t \qquad (14.5)$$

अब, चूँकि गति आवर्ती है जिसका आवर्तकाल T है, अतः गति के एक आवर्तकाल के पश्चात् विस्थापन $x(t)$ को अपने आरंभिक मान पर वापस लौटना चाहिए; अर्थात् t के हर मान के लिए $\boldsymbol{x(t)}$ का मान $\boldsymbol{x(t+T)}$ के तुल्य होना चाहिए । इस शर्त का समीकरण (14.5) में उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$A\cos \omega t = A\cos \omega(t+T) \qquad (14.6)$$

चूँकि जैसे कि कोणांक (कला) में 2π रेडियन की वृद्धि होती है, कोज्या फलन स्वयं अपनी पुनरावृत्ति करता है, समीकरण (14.6) से

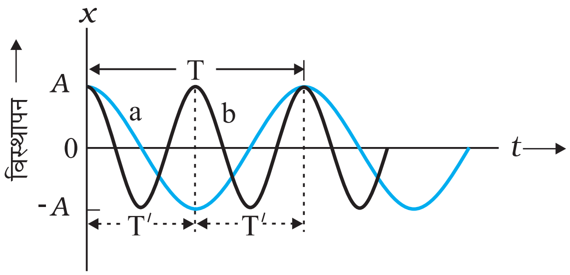
$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

अथवा $\omega T = 2\pi$

इस प्रकार, कोणीय आवृत्ति,

$$\omega = 2\pi/T \qquad (14.7)$$

कोणीय वेग का SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड है । आवर्तकाल T का महत्त्व स्पष्ट करने के लिए चित्र 14.8 में दो भिन्न आवर्तकालों के लिए ज्यावक्रीय फलन आलेखित किए गए हैं । इस आलेख में वक्र a आवर्तकाल T तथा वक्र b आवर्तकाल $T' = T/2$ की सरल आवर्त गतियों को निरूपित करते हैं ।



चित्र 14.8 समीकरण (14.4) के $\phi = 0$ rad पर दो भिन्न आवर्तकालों के लिए आलेख ।

अब तक हमने सरल आवर्त गति का आरंभिक ज्ञान प्राप्त किया । हम अगले अनुभाग में सरल आवर्त गति के सरलतम उदाहरण की चर्चा करेंगे । वहाँ यह दर्शाया जाएगा कि एकसमान वर्तुल गति का वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप सरल आवर्त गति करता है ।

▶ **उदाहरण 14.3** समय के निम्नलिखित फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्ती गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं ? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए ।

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^2 \omega t$

हल (a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin(\pi/2 - \omega t)$

$= 2\cos \pi/4 \sin(\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/4)$

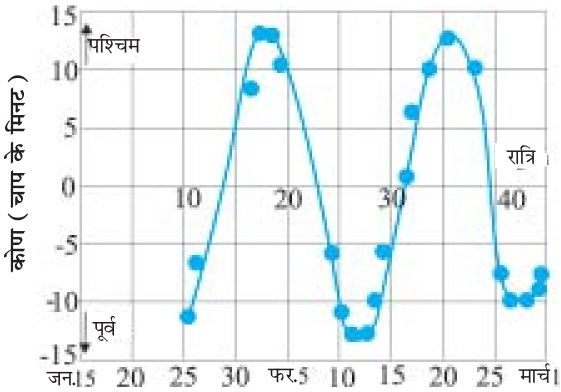
यह फलन सरल आवर्त गति का निरूपण करता है, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$ तथा कला-कोण $(-\pi/4)$ rad अथवा $(7\pi/4)$ rad है ।

(b) $\sin^2 \omega t = ½ - ½ \cos 2\omega t$

यह फलन आवर्ती है, जिसका आवर्तकाल $T = \pi/\omega$ है । ये संतुलन बिंदु शून्य के स्थान से $\frac{1}{2}$ पर सरल आवर्त गति को भी दर्शाता है। ◀

14.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति

सन् 1610 ई. में गैलीलियो ने बृहस्पति ग्रह के चार प्रमुख चंद्रमाओं की खोज की । उन्हें प्रत्येक चंद्रमा ग्रह के सापेक्ष अग्र तथा पश्च सरल आवर्त गति करता प्रतीत हुआ; ग्रह की चक्रिका (डिस्क) गति के मध्य बिंदु को निरूपित करती है । गैलीलियो के प्रेक्षणों के हस्तलिखित अभिलेख आज भी उपलब्ध हैं । उनके आँकड़ों पर आधारित, बृहस्पति के आपेक्ष चंद्रमा कैलिस्टो की स्थिति चित्र 14.9 में आलेखित की गई है । इस चित्र में, वृत्त गैलीलियो के प्रेक्षणों को दर्शाते हैं तथा खींचा गया वक्र आँकड़ों के लिए सर्वोपयुक्त है । वक्र समीकरण (14.4) का पालन करता है जो

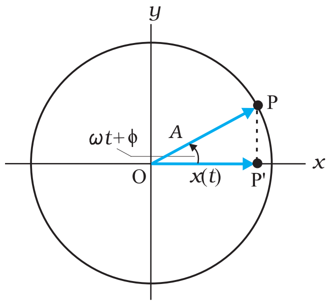


चित्र 14.9 पृथ्वी से देखने पर बृहस्पति तथा उसके कैलिस्टो चंद्रमा के बीच कोण। वृत्त गैलीलियो के सन् 1610 के प्रेक्षणों पर आधारित हैं। वक्र प्रेक्षणों के सर्वाधिक अनुकूल है तथा सरल आवर्त गति को प्रस्तावित करता है। बृहस्पति की माध्य दूरी पर 10 मिनट का चाप लगभग 2 10⁶km दूरी के तदनुरूपी है।

सरल आवर्त गति के लिए विस्थापन फलन है। इस वक्र द्वारा प्राप्त आवर्तकाल लगभग 16.8 दिन है।

यह सर्वविदित है कि कैलिस्टो सार रूप से एक अचर चाल से वर्तुल कक्ष में बृहस्पति ग्रह के चारों ओर गति करता है। इसकी यथार्थ गति एकसमान वर्तुल गति है। गैलीलियो ने जो देखा तथा जो कुछ हम भी एक अच्छे द्विनेत्री (बाइनाक्युलर) द्वारा देख सकते हैं वह वास्तव में गति के तल में किसी सरल रेखा पर एकसमान वर्तुल गति का प्रक्षेप होता है। इसे एक सरल प्रयोग करके आसानी से देखा जा सकता है। एक गेंद को किसी डोरी के सिरे से बाँधकर क्षैतिज तल में उसे किसी निश्चित बिंदु के परितः अचर कोणीय चाल से गति कराइए। तब गेंद क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति करेगी। अपनी आँख को गति के तल में केंद्रित करके तिरछी ओर से अथवा सामने से गेंद का अवलोकन कीजिए। गेंद एक क्षैतिज रेखा के अनुदिश इधर-उधर गति करती प्रतीत होगी इसमें घूर्णन बिंदु मध्य बिंदु होगा। विकल्पतः आप गेंद की परछाई वृत्त के तल के लंबवत् किसी दीवार पर भी देख सकते हैं। इस प्रक्रिया में हम जो कुछ अवलोकन करते हैं, वास्तव में, वह हमारी दृष्टि की दिशा के अभिलंबवत् व्यास पर गेंद की गति होती है। यह प्रयोग हमें गैलीलियो के प्रेक्षण का सादृश प्रदान करता है।

चित्र 14.10 में, हमने एक **संदर्भ वृत्त** में किसी **संदर्भ बिंदु** P को (अचर) कोणीय चाल ω से एकसमान वर्तुल गति करते हुए दर्शाया है। वृत्त की त्रिज्या A कण के "स्थिति सदिश" का परिमाण है। किसी समय t पर, कण की कोणीय स्थिति $\omega t + \phi$ है, यहाँ ϕ इस कण की $t = 0$ पर कोणीय स्थिति है।



चित्र 14.10 त्रिज्या A के संदर्भ वृत में किसी संदर्भ बिंदु P की (अचर) कोणीय चाल ω से एकसमान वर्तुल गति।

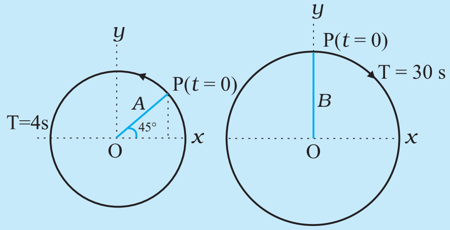
x-अक्ष पर कण P का प्रक्षेप बिंदु P' है, जिसे हम दूसरे कण के रूप में परिलक्षित कर सकते हैं। x-अक्ष पर कण P के स्थिति सदिश का प्रक्षेप बिंदु P′ की अवस्थिति $x(t)$ बताता है। इस प्रकार, हमें यह संबंध प्राप्त होता है :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

जो समीकरण (14.4) के समान है। यह दर्शाता है कि यदि संदर्भ कण P एकसमान वर्तुल गति करता है तो इसका प्रक्षेप बिंदु P′ वृत्त के व्यास के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है।

गैलीलियो के प्रेक्षण तथा उपरोक्त विचारों के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि वर्तुल गति किनारे की ओर से देखने पर सरल आवर्त गति होती है। इसे और अधिक विधिवत भाषा में हम इस प्रकार कह सकते हैं : ***सरल आवर्त गति एक समान वर्तुल गति का उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है जिसमें यह वर्तुल गति हो रही है।***

▶ **उदाहरण 14.4** नीचे दिए गए चित्रों में दो वर्तुल गतियाँ दर्शायी गई हैं। इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है। प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्या सदिश के x-प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए।



चित्र 14.11

हल

(a) $t = 0$ पर, OP x-अक्ष (की धनात्मक दिशा) से 45 $= \pi/4$ rad का कोण बनाता है। t समय पश्चात् यह

वामावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)$ rad कोण बनाता है। समय t पर x-अक्ष पर OP के प्रक्षेप इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$T = 4$ s के लिए

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

जो कि A आयाम, 4 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला* $\frac{\pi}{4}$ की सरल आवर्त गति है।

(b) इस स्थिति में $t = 0$ पर, OP x-अक्ष से 90 $= \pi/2$ का कोण बनाता है। यह दक्षिणावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$ कोण बनाता है। समय t पर x-अक्ष पर OP प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$T = 30$ s के लिए,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

इसे इस प्रकार $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$ लिखकर इसकी समीकरण (14.4) से तुलना करने पर हमें यह ज्ञात होता है कि यह B आयाम, 30 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $-\frac{\pi}{2}$ rad की सरल आवर्त गति को निरूपित करता है। ◄

14.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण

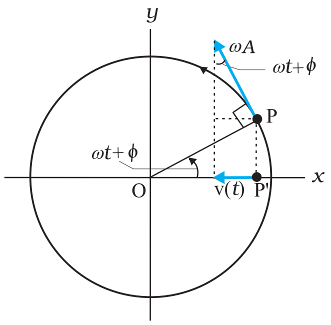
यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि वेग **v** का परिमाण जिससे संदर्भ बिंदु P (चित्र 14.10) r त्रिज्या के वृत्त में गतिमान है, अपनी कोणीय चाल ω से इस प्रकार संबंधित है,

$$v = \omega A \qquad (14.8)$$

यहाँ A कण P द्वारा वर्णित वृत्त की त्रिज्या है। वेग सदिश का परिमाण ωA है, तथा चित्र 14.12 में दर्शाए अनुसार इसके x-अक्ष पर प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \qquad (14.9)$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न के दृष्टिगोचर होने का कारण यह है कि P′ का वेग घटक बाईं ओर निर्दिष्ट है, जो x की ऋणात्मक दिशा है। समीकरण (14.9) कण P′ (P का प्रक्षेप) के तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करता है। अतः **यह सरल आवर्त गति करने वाले कण के तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करता है।** समीकरण (14.4) को समय के साथ अवकलित करके भी समीकरण (14.9) को प्राप्त किया जा सकता है।



*चित्र 14.12 कण P′ का वेग v(t) संदर्भ कण P, के वेग **v** का प्रक्षेप है।*

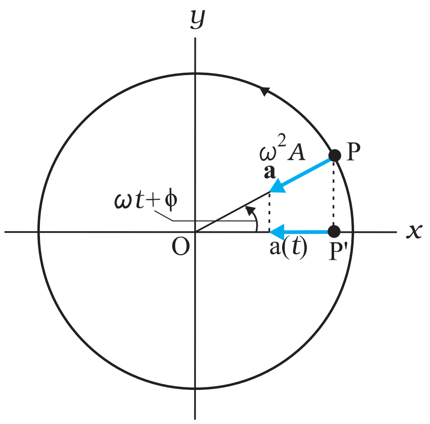
* कोण की प्राकृतिक इकाई रेडियन है जिसे त्रिज्या की चाप के अनुपात द्वारा परिभाषित करते हैं। कोण अदिश राशि है। जब हम π को उसके बहुगुण या अपवर्तक लिखते हैं तो रेडियन इकाई का उल्लेख करना आवश्यक नहीं है। रेडियन और डिग्री के बीच रूपांतरण, मीटर, सेंटीमीटर या मील के बीच रूपांतरण के समरूप नहीं है। यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के कोणांक में इकाई नहीं दिया है तो मानना चाहिए कि इकाई रेडियन है। यदि कोण की इकाई डिग्री है तो उसको स्पष्टतः दर्शाना होगा। उदाहरण के लिए $\sin(15^0)$ का अर्थ है 15 डिग्री का sin। परन्तु sin (15) का तात्पर्य 15 रेडियन का sin है। आगे से 'rad' इकाई नहीं दर्शाया जाएगा। जब भी कोण का अंकिक मान बिना इकाई के दिया हुआ है तो इकाई वास्तव में रेडियन है।

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

हमने देखा है कि एकसमान वर्तुल गति करते हुए किसी कण पर केंद्र की ओर निर्दिष्ट एक त्रिज्य त्वरण **a** लगता है। चित्र 14.13 में एकसमान वर्तुल गति करते हुए संदर्भ बिंदु P का इसी प्रकार का त्रिज्य त्वरण **a** दर्शाया गया है। P के इस त्रिज्य त्वरण का परिमाण $\omega^2 A$ है। किसी क्षण t पर इसके x-अक्ष पर प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (14.11)$$

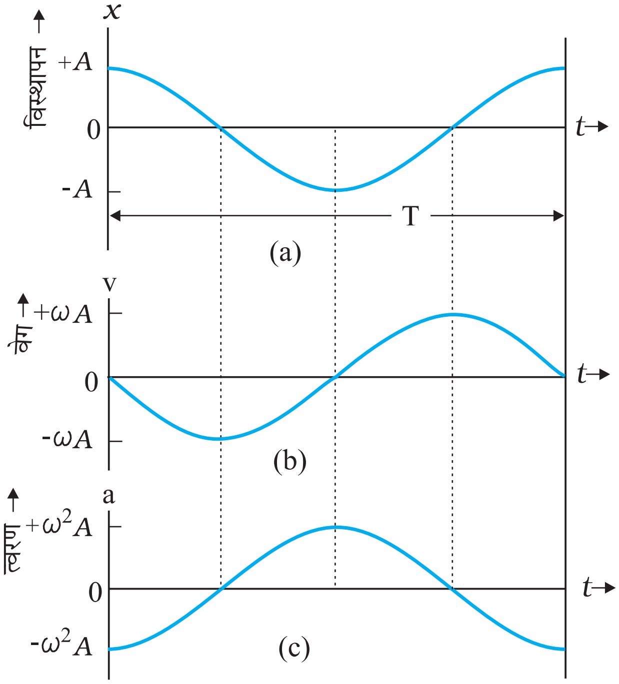


*चित्र 14.13 बिंदु P′ का त्वरण a(t), संदर्भ बिंदु P के त्वरण **a** का प्रक्षेप होता है।*

यह कण P′ (कण P के प्रक्षेप)) का त्वरण है। समीकरण (14.11) सरल आवर्त गति करने वाले कण P′ के तात्क्षणिक त्वरण का निरूपण करता है जो सरल आवर्त गति कर रहा है। इस प्रकार, समीकरण (14.11) सरल आवर्त गति करते किसी कण का त्वरण व्यक्त करता है। सरल आवर्त गति के लिए यह एक महत्त्वपूर्ण परिणाम है। यह व्यक्त करता है कि ***सरल आवर्त गति में त्वरण विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा यह सदैव ही गति के माध्य अवस्था की ओर निर्दिष्ट होता है।*** समीकरण (14.9) को समय के साथ अवकलित करके भी समीकरण (14.11) प्राप्त किया जा सकता है

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \qquad (14.12)$$

चित्र 14.14 में सरल आवर्त गति करते किसी कण के विस्थापन, उसके वेग तथा त्वरण में परस्पर संबंध को देख सकते हैं। इस चित्र में, (a) $\phi = 0$ पर समीकरण (14.4) का आलेख है तथा (b) $\phi = 0$ पर ही समीकरण (14.9) को दर्शाता है। समीकरण (14.4) में जिस प्रकार विस्थापन आयाम A है, उसी प्रकार समीकरण (14.9) में धनात्मक राशि ωA **वेग आयाम** v_m कहलाती है। चित्र 14.14(b) में, यह देखा जा सकता है कि दोलायमान कण का वेग सीमाओं $\pm v_m = \pm \omega A$ के बीच विचरण करता है। ध्यान दीजिए कि $v(t)$ का वक्र $x(t)$ के वक्र से एक-चौथाई आवर्तकाल द्वारा (बाईं ओर) विस्थापित हो गया है, तथा इस प्रकार कण-वेग विस्थापन से $\pi/2$ के कला-कोण द्वारा पीछे है; जब विस्थापन का परिमाण अधिकतम होता है, तब वेग का परिमाण अल्पतम होता है। जब विस्थापन का परिमाण अल्पमत होता है, तब वेग अधिकतम होता है। चित्र 14.14(c) में त्वरण $a(t)$ का विचरण दर्शाया गया है। यह देखा गया है कि जब विस्थापन का अधिकतम धनात्मक मान होता है, तब त्वरण का अधिकतम ऋणात्मक मान होता है, तथा जब विस्थापन का अधिकतम ऋणात्मक मान होता है तब त्वरण का अधिकतम धनात्मक मान होता है। जब विस्थापन शून्य होता है, तब त्वरण भी शून्य हो जाता है।



चित्र 14.14 सरल आवर्त गति में कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण। (a) सरल आवर्त गति करते कण का कला कोण शून्य होने पर विस्थापन x(t), (b) कण का वेग v(t), (c) कण का त्वरण a(t)।

> ▶ **उदाहरण 14.5 :** कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है,
>
> $x = (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ rad/s})\, t + \pi/4]$
>
> $t = 1.5$ s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए।

हल पिंड की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ तथा इसका आवर्तकाल $T = 1$ s

$t = 1.5$ s पर,

(a) विस्थापन $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ s}^{-1})\ \ 1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4}]$

$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= -5.0\ \ 0.707 \text{ m}$

$= -3.535 \text{ m}$

(b) समीकरण (14.9) का उपयोग करने पर पिंड का वेग

$= -\ (5.0 \text{ m})\ (2\pi \text{ s}^{-1})\ \sin\ [(2\pi \text{ s}^{-1})\ (1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4})]$

$= -(5.0 \text{ m})\ (2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= \ 10\pi\ \ 0.707 \text{ m s}^{-1}$

$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) समीकरण (14.10) का उपयोग करने पर पिंड का त्वरण

$= -\ (2\pi \text{ s}^{-1})^2$ विस्थापन

$= -\ (2\pi \text{ s}^{-1})^2\ \ (-3.535 \text{ m})$

$= 140 \text{ m s}^{-2}$ ◀

14.6 सरल आवर्त गति के लिए बल नियम

अनुभाग 14.3 में हमने सरल आवर्त गति का वर्णन किया है। अब हम यह चर्चा करेंगे कि सरल आवर्त गति किस प्रकार उत्पन्न की जा सकती है। न्यूटन के गति का द्वितीय नियम किसी निकाय पर कार्यरत बल तथा तदनुरूपी उत्पन्न त्वरण के बीच संबंध प्रदान करता है। अत:, यदि हमें समय के साथ किसी कण के त्वरण में विचरण की जानकारी है, तो इस नियम का उपयोग उस बल के विषय में जानकारी के लिए किया जा सकता है जो उस कण पर लगना चाहिए ताकि उस कण में वैसा ही त्वरण उत्पन्न हो जाए। यदि हम न्यूटन के द्वितीय नियम तथा समीकरण (14.11) को संयोजित करें, तो सरल आवर्त गति के लिए हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$F(t) = ma$$

$$= -m\omega^2 x(t)$$

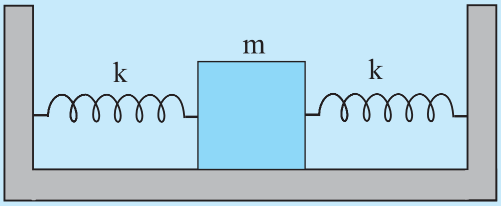
अथवा, $F(t) = -k\, x(t)$ (14.13)

यहाँ $k = m\omega^2$ (14.14a)

अथवा, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (14.14b)

समीकरण (14.13) से कण पर कार्यरत बल प्राप्त होता है। यह विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा विपरीत दिशा में निर्दिष्ट होता है। अत: यह एक प्रत्यानयन बल होता है। ध्यान दीजिए, एकसमान वर्तुल गति के लिए परिमाण में अचर अभिकेंद्र बल के विपरीत सरल आवर्त गति के लिए प्रत्यानयन बल समय पर निर्भर करता है। समीकरण (14.13) द्वारा व्यक्त बल नियम को सरल आवर्त गति की वैकल्पिक परिभाषा के रूप में लिया जा सकता है। इसके अनुसार : ***सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर आरोपित बल उसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा सदैव गति के माध्य स्थिति की ओर निर्दिष्ट होती है।***

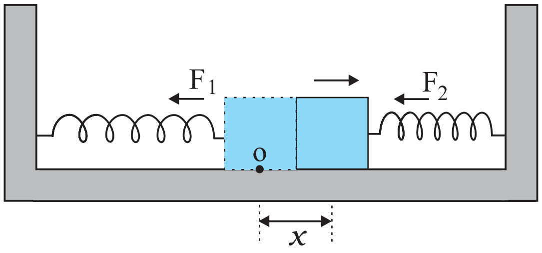
चूँकि बल F विस्थापन x के अनुक्रमानुपाती होता है, x की अन्य घातों के अनुक्रमानुपाती नहीं, इस प्रकार के निकाय को **रैखिक सरल आवर्ती दोलक** के रूप में भी निरूपित किया जाता है। ऐसे निकाय जिनमें प्रत्यानयन बल x का अरैखिक फलन होता है, अरैखिक सरल आवर्ती दोलक कहलाते हैं।

> ▶ **उदाहरण 14.6** कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियाँ M संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं।
>
> 
>
>
> **चित्र 14.15**
>
> यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से दाईं ओर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है। इसे चित्र 14.16 में दिखाया गया है। इस स्थिति में बाईं ओर की कमानी x लंबाई द्वारा दीर्घित हो जाती है तथा दाईं ओर की कमानी भी उतनी ही लंबाई द्वारा संपीडित हो जाती है। तब गुटके पर कार्यरत बल

$F_1 = -k\, x$ (कमानी द्वारा बाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर खींचने का प्रयास करता है।)

$F_2 = -k\,x$ (कमानी द्वारा दाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर धकेलने का प्रयास करता है ।)



चित्र 14.16

तब गुटके पर आरोपित नेट बल,

$$F = -2\,kx$$

अत:, गुटके पर आरोपित बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती तथा माध्य-स्थिति की ओर निर्दिष्ट होता है; इसलिए, गुटके की गति सरल आवर्त गति है । इसमें दोलन का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

है ।

14.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते किसी कण में गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएँ होती हैं । ये दोनों ही ऊर्जाएँ शून्य तथा अपने अधिकतम परिमाण के बीच विचरण करती रहती हैं ।

अनुभाग 14.5 में हमने देखा है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग समय का आवर्ती फलन होता है । विस्थापन की चरम स्थितियों में यह शून्य होता है । अत: ऐसे कण की गतिज ऊर्जा (K), जिसे हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

भी समय का आवर्ती फलन होती है जिसका परिमाण विस्थापन अधिकतम होने पर शून्य तथा कण के माध्य स्थिति पर होने पर अधिकतम होता है । ध्यान दीजिए, चूँकि गतिज ऊर्जा K में, v के चिह्न का कोई अर्थ नहीं होता, अत: K का आवर्तकाल $T/2$ है ।

सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण की स्थितिज ऊर्जा कितनी होती है ? अध्याय 6 में हमने देखा है कि स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना केवल संरक्षी बलों के लिए ही होती है । कमानी बल $F = -kx$ एक संरक्षी बल है जिससे स्थितिज ऊर्जा संयुक्त होती है ।

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (14.16)$$

अत: सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा,

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

इस प्रकार, सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा भी आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल $T/2$ होता है, यह ऊर्जा माध्य स्थिति में शून्य तथा चरम विस्थापनों पर अधिकतम होती है । अत: समीकरणों (14.15) तथा (14.17) से हमें निकाय की कुल ऊर्जा E, प्राप्त होती है,

$$E = U + K$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

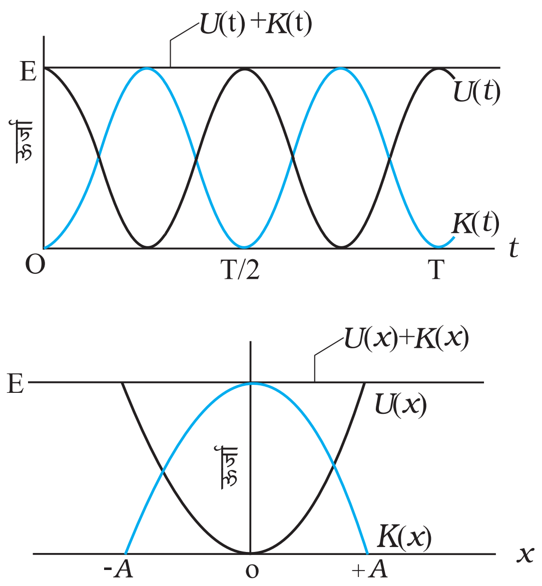
$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

ऊपर वर्ग कोष्ठक में दी गई राशि का मान एक है, अत: हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है,

$$E = \frac{1}{2}k\,A^2 \qquad (14.18)$$

जैसा कि संरक्षी बलों के अधीन गतियों के लिए आशा की जाती है किसी भी सरल आवर्ती दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा कालाश्रित नहीं होती । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं की समय और विस्थापन पर निर्भरता चित्र 14.17 में दर्शायी गई है ।

प्रेक्षणों से ज्ञात होता है कि किसी रैखिक सरल आवर्त दोलक की सभी ऊर्जाएँ धनात्मक होती हैं तथा प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार शिखर पर होती हैं । $x = 0$ के लिए समस्त ऊर्जा गतिज ऊर्जा होती है तथा $x = \pm A$ के लिए समस्त ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है । इन चरम स्थितियों के बीच गतिज ऊर्जा



चित्र 14.17 *(a) किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के लिए स्थितिज ऊर्जा U(t), गतिज ऊर्जा K(t) तथा कुल ऊर्जा E समय t के फलन के रूप में । सभी ऊर्जाएँ धनात्मक हैं तथा दोलन के प्रत्येक आवर्तकाल में स्थितिज और गतिज ऊर्जाएँ दो बार शिखर पर होती हैं । (b) आयाम A के किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के लिए स्थितिज ऊर्जा U(x), गतिज ऊर्जा K(x) तथा कुल ऊर्जा E स्थिति x के फलन के रूप में । x = 0 के लिए समस्त ऊर्जा गतिज ऊर्जा होती है तथा x = ± A के लिए समस्त ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है ।*

घटने से स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होती है । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के इस व्यवहार से हमें यह संकेत मिलता है कि ऐसा दोलक लचीलेपन का तत्व तथा जड़त्व का तत्व धारण करता है। इसके पहले तत्व में स्थितिज ऊर्जा संचित होती है तथा बाद के तत्व में गतिज ऊर्जा संचित होती है ।

उदाहरण 14.7 1kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बाँधा गया है । कमानी का कमानी स्थिरांक $50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ है । गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10$ cm तक खींचा जाता है। जब गुटका अपनी माध्य-स्थिति से 5 cm दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएँ परिकलित कीजिए ।

हल गुटका सरल आवर्त गति करता है । समीकरण [14.14(b)] से इसकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= \sqrt{\frac{50\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{1\,\mathrm{kg}}}$$

$= 7.07\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$ होगी,

तब किसी समय t पर इसका विस्थापन

$x(t) = 0.1 \cos(7.07t)$ होगा ।

अतः, जब कण अपनी माध्य स्थिति से 5 cm दूर है, तब

$$0.05 = 0.1 \cos(7.07t)$$

अथवा $\cos(7.07t) = 0.5$, अत: $\sin(7.07t) = \sqrt{3}/2 = 0.866$

तब गुटके का $x = 5$ cm पर वेग $= 0.1\ \ 7.07\ \ 0.866\,\mathrm{m\ s^{-1}}$

$= 0.61\,\mathrm{m\ s^{-1}}$

अतः, गुटके की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

$$= \frac{1}{2}\left[1 \times (0.6123)^2\right]$$

$= 0.19$ J

तथा गुटके की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kx^2$

$$= \frac{1}{2}\left(50\ \mathrm{N\ m^{-1}} \times 0.05 \times 0.05\ \mathrm{m}\right)$$

$= 0.0625$ J

$\therefore$ $x = 5$ cm पर गुटके की कुल ऊर्जा

$= (0.1874 + 0.0625)$ J

$= 0.25$ J

हम यह भी जानते हैं कि अधिकतम विस्थापन पर, गतिज ऊर्जा शून्य होती है, अत: निकाय की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है । अत: निकाय की कुल ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2}(50\ \ 0.5\ \ 0.5)\ \mathrm{J}$$

$= 0.25$ J

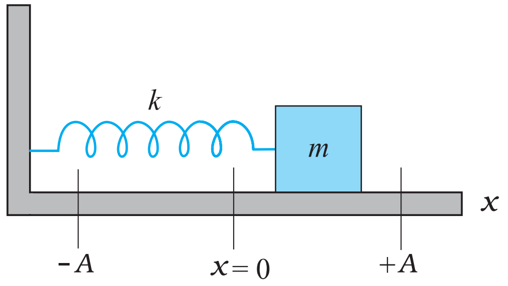
यह ऊर्जा 5 cm विस्थापन पर दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर ही है । यह ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत के अनुकूल है। ◀

14.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

निरपेक्षत: शुद्ध सरल आवर्त गति के कोई भौतिक उदाहरण नहीं हैं । अपने व्यावहारिक जीवन में हम ऐसे निकाय देखते हैं जो किन्ही निश्चित परिस्थितियों में लगभग सरल आवर्त गति करते हैं । इस अनुभाग में इसके पश्चात् हम ऐसे ही कुछ निकायों की गतियों की चर्चा करेंगे ।

14.8.1 कमानी के दोलन

सरल आवर्त गति का सरलतम प्रेक्षण योग्य उदाहरण, चित्र 14.18 की भाँति, किसी कमानी के एक सिरे से जुड़े m संहति के किसी गुटके के छोटे दोलन होते हैं। कमानी का दूसरा सिरा एक दृढ़ दीवार से जुड़ा होता है । गुटके को किसी समतल घर्षणरहित पृष्ठ पर रखते हैं । यदि गुटके को एक ओर थोड़ा खींचकर छोड़ दें, तो वह किसी माध्य स्थिति पर इधर-उधर गति करने लगता है। मान लीजिए $x = 0$ गुटके के केंद्र की उस स्थिति को सूचित करता है जब कमानी विश्रांत अवस्था में है । चित्र में अंकित स्थितियाँ $-A$ तथा $+A$ माध्य स्थिति से बाईं तथा दाईं ओर के अधिकतम विस्थापनों को इंगित करती हैं । हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि कमानियों में विशेष गुण होते हैं, जिन्हें



चित्र 14.18 एक रैखिक सरल आवर्ती दोलक जिसमें m संहति का एक गुटका किसी कमानी से जुड़ा है । गुटका एक घर्षणरहित पृष्ठ पर गति करता है । एक बार किसी ओर खींचकर छोड़ने पर गुटका सरल आवर्त गति करता है ।

सर्वप्रथम एक अंग्रेज भौतिकीवेत्ता रॉबर्ट हुक ने खोजा था । उन्होंने दर्शाया कि जब ऐसे किसी निकाय को विरूपित किया जाता है, तो उस पर एक प्रत्यानयन बल लगता है, जिसका परिमाण विरूपण अथवा विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा यह विपरीत दिशा में कार्य करता है । इसे हुक का नियम (अध्याय 9) कहते हैं। यह नियम तब भलीभाँति लागू होता है जब विस्थापन कमानी की लंबाई की तुलना में काफी कम होते हैं। किसी समय t पर, यदि गुटके का उसकी माध्य स्थिति से विस्थापन x है, तो गुटके पर कार्यरत बल F इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$F(x) = -kx \qquad (14.19)$$

यहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है जिसे कमानी-स्थिरांक कहते हैं, तथा इसका मान कमानी के प्रत्यास्थ गुणों से ज्ञात किया जाता है। किसी दृढ़ कमानी के लिए k का मान अधिक तथा मृदु कमानी के k का मान कम होता है । समीकरण (14.19), सरल आवर्त गति के लिए बल-नियम के समान है, अतः यह निकाय सरल आवर्त गति करता है । समीकरण (14.14) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (14.20)$$

तथा दोलक का आवर्तकाल, T इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (14.21)$$

समीकरणों (14.20) तथा (14.21) से हमें यह ज्ञात होता है कि यदि गुटका हलका (m का मान कम) तथा कमानी दृढ़ (k अधिक) है, तो कोणीय आवृत्ति अधिक तथा आवर्तकाल कम होता है ।

उदाहरण 14.8 500 N m^{-1} कमानी स्थिरांक की किसी कमानी से 5 kg संहति का कोई कॉलर जुड़ा है जो एक क्षैतिज छड़ पर बिना किसी घर्षण के सरकता है । कॉलर को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से 10.0 cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है । कॉलर के (a) दोलन का आवर्तकाल (b) अधिकतम चाल तथा (c) अधिकतम त्वरण परिकलित कीजिए।

हल (a) समीकरण (14.21) के अनुसार दोलन का आवर्त काल होता है :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{5.0 \text{ kg}}{500 \text{ N m}^{-1}}}$$

$$= \frac{2\pi}{10 \text{ s}^{-1}}$$

$$= 0.63 \text{ s}$$

(b) सरल आवर्त गति करते कॉलर का वेग इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$v(t) = -A\,\omega \sin(\omega t + \phi)$$

अतः अधिकतम चाल,

$$v_m = A\,\omega$$

$$= 0.1\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1\sqrt{\frac{500 \text{ N m}^{-1}}{5 \text{ kg}}}$$

$$= 1 \text{ m s}^{-1}$$

और यहाँ $x = 0$

(c) साम्यावस्था की स्थिति से $x(t)$ विस्थापन पर कॉलर का त्वरण इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$= -\frac{k}{m}x(t)$$

अतः अधिकतम त्वरण

$$a_{max} = \omega^2 A$$

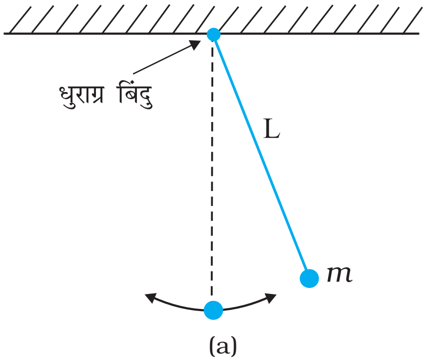
$$= \frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}} \times 0.1\,\text{m}$$

$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

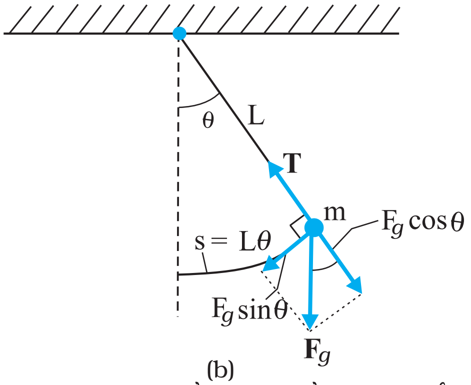
और यह अग्रान्त पर घटित होता है। ◀

14.8.2 सरल लोलक

यह कहा जाता है कि गैलीलियो ने किसी चर्च में एक दोलायमान झाड़फानूस का आवर्तकाल अपनी नाड़ी की स्पंद गति द्वारा मापा था । उसने यह निष्कर्ष निकाला कि झाड़फानूस की गति आवर्ती है । यह निकाय लोलक का ही एक प्रकार होता है । लगभग 1 मीटर लंबे न खिंचने वाले धागे को लेकर उसके एक सिरे से पत्थर का टुकड़ा बाँधकर आप भी अपना एक लोलक बना सकते हैं । अपने लोलक को किसी उचित टेक से बाँधकर इस प्रकार लटकाइए कि वह स्वतंत्रतापूर्वक दोलन कर सके । पत्थर के टुकड़े को कम दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दीजिए । पत्थर इधर-उधर गति करने लगता है । पत्थर की यह गति आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल लगभग 2 सेकंड होता है । क्या इसकी गति सरल आवर्त गति है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हम एक ऐसे **सरल लोलक** के बारे में विचार करते हैं जो m द्रव्यमान के कण (जिसे लोलक का गोलक कहते हैं) को किसी L लंबाई की द्रव्यमानहीन, न खिंच सकने योग्य डोरी के एक सिरे से बाँधकर लटकाने से बनता है [देखिए चित्र 14.19(a)] । यह गोलक पृष्ठ के तल में इधर-उधर, धुराग्र बिंदु से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा के बाएँ और दाएँ दोलन करने के लिए स्वतंत्र होता है ।



(a)



(b)

*चित्र 14.19 (a) सरल लोलक, (b) गोलक पर कार्यरत बल है– गुरुत्व बल, $\mathbf{F_g}$ (=$m\mathbf{g}$) तथा डोरी में तनाव **T** । यहाँ गुरुत्व बल $\mathbf{F_g}$ का स्पर्शरेखीय घटक एक प्रत्यानयन बल है जो लोलक को वापस उसकी केंद्रीय स्थिति पर लाने का प्रयास करता है ।*

चित्र 14.19 (b) में दर्शाए अनुसार गोलक पर कार्यरत बल है– डोरी में तनाव **T**, तथा गुरुत्व बल $\mathbf{F_g}$ (=$m\mathbf{g}$) । डोरी ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाती है । हम बल $\mathbf{F_g}$ का वियोजन त्रिज्य घटक $F_g \cos\theta$ तथा स्पर्शरेखीय घटक $F_g \sin\theta$ में कर सकते हैं। चूँकि डोरी की लंबाई के अनुदिश कोई गति नहीं होती। अतः त्रिज्य घटक डोरी के तनाव को निरसित कर देता है। स्पर्शरेखीय घटक लोलक के धुराग्र बिंदु के परितः एक प्रत्यानयन बल आघूर्ण उत्पन्न करता है । यह बल आघूर्ण सदैव ही गोलक के विस्थापन के विपरीत कार्य करता है ताकि वह गोलक को उसकी केंद्रीय अवस्थिति की ओर वापस ला सके । गोलक की केंद्रीय अवस्थिति को **साम्यावस्था की स्थिति** ($\theta = 0$) कहते हैं, क्योंकि यदि लोलक दोलन नहीं करता तो वह इसी स्थिति पर विराम करता है । प्रत्यानयन बल आघूर्ण τ को इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$\tau = -L\,(F_g \sin\theta) \tag{14.22}$$

यहाँ ऋण चिह्न यह सूचित करता है कि बल आघूर्ण τ θ को घटाने का कार्य करता है, तथा L धुराग्र बिंदु के परितः बल $F_g \sin\theta$ की आघूर्ण भुजा है । घूर्णी गति के लिए

$$\tau = I\alpha \tag{14.23}$$

यहाँ I धुराग्र बिंदु के परितः लोलक का घूर्णी जड़त्व है तथा α उसी बिंदु के परितः कोणीय त्वरण है । समीकरणों (14.22) तथा (14.23) से

$$-L\,(F_g \sin\theta) = I\alpha \tag{14.24}$$

F_g का परिमाण, अर्थात् mg का मान रखने पर

$$-L\,(mg \sin\theta) = I\alpha$$

अथवा $$\alpha = -\frac{mgL\sin\theta}{I} \tag{14.25}$$

यदि हम यह मानें कि विस्थापन θ छोटा है, तो समीकरण (14.25) को सरल बना सकते हैं । हम जानते हैं कि $\sin\theta$ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots \qquad (14.26)$$

यहाँ θ रेडियन में है।

अब यदि θ छोटा है, तो $\sin\theta$ का सन्निकटन θ द्वारा किया जा सकता है । ऐसी परिस्थिति के समीकरण (14.25) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (14.27)$$

सारणी 14.1 में हमने कोण θ को अंशों में, इसके तुल्यांक रेडियनों में, तथा फलन $\sin\theta$ के मान सूचीबद्ध किए हैं । सारणी से यह देखा जा सकता है कि θ के 20 अंश तक बड़े मानों के लिए $\sin\theta$ के मान लगभग वही होते हैं जैसे θ को **रेडियनों में व्यक्त** करने पर मिलते हैं

सारणी 14.1 $\sin\theta$ कोण θ के फलन के रूप में

θ (अंशों में)	θ (रेडियनों में)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

समीकरण (14.27) समीकरण (14.11) का कोणीय तुल्य रूप है, तथा यह बताती है कि लोलक का कोणीय त्वरण कोणीय विस्थापन θ के अनुक्रमानुपाती, परंतु चिह्न में विपरीत होता है । इस प्रकार, जैसे ही लोलक दाईं ओर गति करता है, इसका त्वरण बाईं ओर तब तक बढ़ता है जब तक यह रुककर बाईं ओर वापस लौटना आरंभ नहीं करता । इसी प्रकार, जब लोलक बाईं ओर गति करता है तो इसका दाईं ओर का त्वरण इसे दाईं ओर वापस लौटने का प्रयास करता है तथा यह क्रम लोलक के इधर-उधर सरल आवर्त गति करते समय चलता रहता है । अधिक परिशुद्ध रूप में यह कहा जा सकता है कि **लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है ।**

समीकरण (14.27) की समीकरण (14.11) से तुलना करने पर हम यह देखते हैं कि लोलक की कोणीय आवृत्ति,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

तथा लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (14.28)$$

सरल लोलक का समस्त द्रव्यमान गोलक की द्रव्यमान m में केंद्रित होता है, जो कि धुराग्र बिंदु से दूरी L पर होता है । अतः इस निकाय के लिए हम $I = mL^2$ लिख सकते हैं । I के इस मान को समीकरण (14.28) में रखने पर

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.29)$$

सरल आवर्त गति–आयाम कितना छोटा होना चाहिए?

जब आप किसी सरल लोलक का आवर्त काल ज्ञात करने के लिए प्रयोग करते हैं तो आपके अध्यापक आयाम को कम रखने की सलाह देते हैं। परन्तु क्या आपने कभी सोचा है कि यह 'कम' कितना कम होना चाहिए? क्या आयाम 5 , 2 , 1 , या 0.5 होना चाहिए या यह 10 , 20 , या 30 भी हो सकता है।

इसकी मात्रा समझने के लिए यह अच्छा होगा कि हम लोलक का आवर्तकाल भिन्न आयामों के लिए ज्ञात करें। परंतु प्रयोग के दौरान आपको ध्यान रखना होगा कि अधिक आयामों की अवस्था में भी लोलक ऊर्ध्वाधर तल में ही दोलन करे। मान लीजिए कम आयाम वाले दोलनों के लिए आवर्तकाल $T(0)$ है। तथा θ आयाम के लिए आवर्तकाल $T(\theta_0) = cT(0)$, यहाँ c गुणककाल है। यदि आप c और θ_0 में ग्राफ खींचे तो इनके विभिन्न मान इस प्रकार होंगे।

θ_0	:	20	45	50	70	90
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

इस सारणी से स्पष्ट है कि लगभग 20 के आयाम पर आवर्तकाल में त्रुटि लगभग 2%, 50 के आयाम पर 5%, 70% के आयाम पर 10% तथा 90 के आयाम पर 18% है।

प्रयोग से आप कभी भी $T(0)$ नहीं माप सकते। क्योंकि यह शून्य दोलन का सूचक है। सैद्धांतिक रूप से भी $\theta = 0$ पर $\sin\theta$, θ के बराबर होता है। θ के अन्य मानों के लिए कुछ त्रुटि तो आ ही जाएगी। यह त्रुटि θ के मान में वृद्धि से बढ़ती है। अतः हमें यह पहले ही निश्चित कर लेना होगा कि त्रुटि की कितनी सीमा होनी चाहिए। वास्तव में कोई भी मापन पूर्ण रूप से त्रुटिरहित नहीं होता है। आपको निम्न प्रश्नों पर भी विचार करना होगा जैसे विराम घड़ी के मान में यथार्थता क्या है? घड़ी के शुरू करने तथा रोकने में आपकी यथार्थता क्या है? आपको पता चलेगा कि इस स्तर पर प्रयोगों में यथार्थता कभी भी 5% या 10% से अधिक नहीं होती। उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि किसी दोलक के आवर्तकाल में वृद्धि 50 के आयाम पर भी 5% से अधिक नहीं होती है। अतः आप अपने प्रयोगों में लोलक का आयाम 50 या इससे कम रख सकते हैं।

समीकरण (14.29) किसी सरल लोलक के आवर्तकाल के लिए एक सरल व्यंजक निरूपित करती है ।

> **उदाहरण 14.9** उस सरल लोलक की लंबाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है ?

हल समीकरण (14.29) से किसी सरल लोलक का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

इस संबंध से हमें प्राप्त होता है,

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

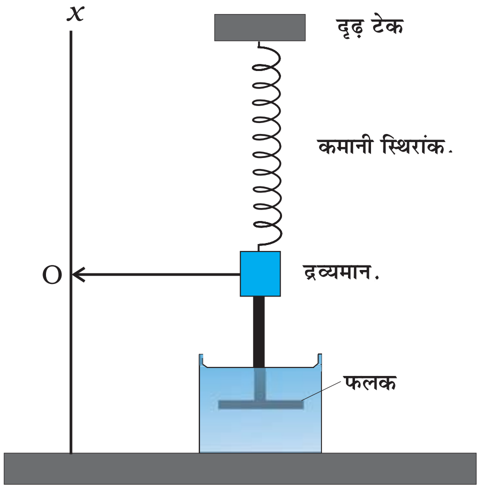
हर एक सेकंड के बाद टिक करने वाले सरल लोलक का आवर्तकाल T, 2 s होता है । अत: $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ तथा $T = 2$ s के लिए सरल लोलक की लंबाई

$$L = \frac{9.8\,(\text{m s}^{-2}) \times 4\,(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1 \text{ m}$$

14.9 अवमंदित सरल आवर्त गति

हम जानते हैं कि वायु में दोलन करने वाले किसी सरल लोलक की गति धीरे-धीरे समाप्त हो जाती है । ऐसा क्यों होता है ? इसका कारण यह है कि वायु का कर्षण बल तथा टेक पर घर्षण बल लोलक की गति का विरोध करते हैं जिससे धीरे-धीरे



चित्र 14.20 अवमंदित सरल आवर्त दोलक। द्रव में डूबी फलक ऊपर-नीचे दोलन करते गुटके पर अवमंदन बल आरोपित करती है।

इसका ऊर्जा-क्षय होता रहता है । लोलक के इस प्रकार के दोलनों को **अवमंदित दोलन** कहते हैं । अवमंदित दोलनों में यद्यपि निकाय की ऊर्जा का धीरे-धीरे क्षय होता रहता है तथापि आभासी रूप से दोलन आवर्ती रहते हैं । व्यापक रूप में क्षयकारी बल घर्षण बल ही होते हैं । इस प्रकार के बाह्य बलों का किसी दोलक की गति पर प्रभाव समझने के लिए आइए चित्र 14.20 में दर्शाए किसी निकाय पर विचार करें । इसमें k कमानी-स्थिरांक की एक कमानी से m द्रव्यमान का एक गुटका ऊर्ध्वाधरत: दोलन करता है । गुटके के साथ छड़ की सहायता से एक फलक जुड़ा है (छड़ तथा फलक को भारहीन मानते हैं)। फलक किसी द्रव में डूबा है । जब गुटका ऊपर-नीचे दोलन करता है तब फलक भी गुटके के साथ द्रव में गति करता है। फलक के ऊपर-नीचे गति से द्रव विस्थापित होता है जो फिर रोकने योग्य कर्षण बल (श्यान कर्षण) फलक पर आरोपित करता है, इस प्रकार समस्त दोलायमान निकाय पर यह बल आरोपित होता है । समय के साथ गुटका-कमानी निकाय की यांत्रिक ऊर्जा, ऊर्जा के द्रव तथा फलक की ऊष्मीय ऊर्जा में स्थानांतरित होने के कारण, घटती जाती है ।

मान लीजिए कि द्रव द्वारा निकाय पर आरोपित अवमंदन बल* F_d है। इसका परिमाण फलक और गुटके के वेग υ के अनुक्रमानुपाती है (एक ऐसी संकल्पना जो तभी सही है जब फलक की गति मंद हो)। तब x-अक्ष के अनुदिश गति के अभिधारणा (चित्र 14.18 में दर्शाए अनुसार ऊर्ध्वाधर दिशा),

$$F_d = -\,b\,\upsilon \qquad (14.30)$$

यहाँ b **अवमंदन स्थिरांक** है जो द्रव के अभिलक्षणों तथा फलक की प्रकृति पर निर्भर करता है । ऋण चिह्न यह दर्शाता है कि किसी भी अवस्था में दबाव, वेग, के विपरीत है।

जब कमानी से कोई द्रव्यमान m से जोड़कर छोड़ते हैं तो कमानी की लंबाई में कुछ वृद्धि होती है तथा द्रव्यमान एक ऊँचाई पर आकर स्थिर हो जाता है। इसे चित्र 14.20 में O से दर्शाये इस अवस्था को द्रव्यमान की संतुलन अवस्था कहते हैं। जब द्रव्यमान को थोड़ा नीचे या ऊपर खींचते हैं तो इस पर एक प्रत्यावस्था (प्रत्यानयन) बल $F_S = -kx$, कार्य करता है। जहाँ x द्रव्यमान की संतुलन अवस्था से विस्थापन है। इस प्रकार किसी क्षण द्रव्यमान पर कार्य करने वाला कुल बल होता है $F = -kx - b\upsilon$। यदि किसी क्षण t पर द्रव्यमान का त्वरण $a(t)$ हो तो न्यूटन की गति के द्वितीय नियम के अनुसार x-अक्ष के अनुदिश बल का घटक होगा।

*गुरुत्व के प्रभाव में गुटका डोरी पर किसी निश्चित साम्यावस्था की स्थिति O पर होगा। यहाँ x उस भाग से विस्थापन को निरूपित करता है ।

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,\upsilon(t) \qquad (14.31)$$

यहाँ पर हमने सदिश संकेत का प्रयोग नहीं किया है क्योंकि हम एकविमीय गति का वर्णन कर रहे हैं। $\upsilon(t)$ के लिए dx/dt तथा $a(t)$ के लिए d^2x/dt^2 प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित अवकलन समीकरण प्राप्त होता है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (14.32)$$

समीकरण (14.32) का हल वेग के अनुपाती अवमंदन बल के प्रभाव में गुटके की गति का वर्णन करता है। इसका हल निम्न रूप में होता है

$$x(t) = A\,e^{-b\,t/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

जहाँ a अवमंदित दोलन का आयाम तथा ω' इसकी कोणीय आवृत्ति होता है

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

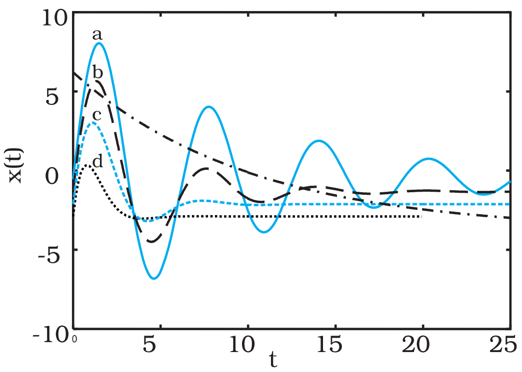
इस फलन में, कोज्या (cos) फलन का आवर्तकाल $2\pi/\omega'$ है परंतु यह फलन वस्तुत: आवर्ती नहीं है क्योंकि कारक $e^{-bt/2m}$ समय के साथ निरंतर घटता है । फिर भी यदि एक आवर्तकाल T में घटोतरी कम है, तो समीकरण (14.33) द्वारा निरूपित गति सन्निकट रूप से आवर्ती है ।

समीकरण (14.33) द्वारा दर्शाए गए हल को चित्र 14.21 में दिए अनुसार ग्राफीय निरूपण द्वारा दर्शाया जा सकता है । इसे हम एक कोज्या फलन की भाँति मान सकते हैं जिसका आयाम $Ae^{-bt/2m}$ समय के साथ धीरे-धीरे घटता है ।

यदि $b = 0$ (कोई अवमंदन नहीं), तब समीकरण (14.33) तथा (14.34) घटकर समीकरण (14.4) तथा [14.14(b)] बन जाती हैं, जो किसी अनवमंदित दोलक के विस्थापन तथा कोणीय आवृत्ति के लिए व्यंजक हैं । हम देख चुके हैं कि किसी अनवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती है तथा इसे समीकरण (14.18) ($E = \frac{1}{2}kA^2$) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि दोलक में अवमंदन है, तो यांत्रिक ऊर्जा अचर नहीं होती, परंतु समय के साथ घटती है । यदि अवमंदन लघु है, तो हम समीकरण (14.18) में A के स्थान पर अवमंदित दोलनों के लिए आयाम $Ae^{-bt/2m}$ लिखकर यांत्रिक ऊर्जा $E(t)$ ज्ञात कर सकते हैं । इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है,

$$E(t) = \frac{1}{2}k\,Ae^{-bt/m} \qquad (14.35)$$

समीकरण (14.35) यह दर्शाता है कि निकाय की कुल ऊर्जा समय के साथ चरघातांकी रूप में घटती है । ध्यान दीजिए, लघु अवमंदन का तात्पर्य यह है कि विमाहीन अनुपात $\left(\frac{b}{\sqrt{km}}\right)$ का मान 1 से बहुत कम है ।



चित्र 14.21 अवमंदित आवर्ती दोलनों में विस्थापन समय के फलन के रूप में ।

▶ **उदाहरण 14.10:** चित्र 14.20 में दर्शाए अवमंदित दोलक के लिए गुटके का द्रव्यमान $m = 200$ g, $k = 90$ N m^{-1} तथा अवमंदन स्थिरांक $b = 40$ g s^{-1} है । (a) दोलन का आवर्तकाल, (b) वह समय जिसमें यांत्रिक ऊर्जा अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित कीजिए ।

हल (a) $km = 90\ 0.2 = 18$ kg N m^{-1} = kg^2 s^{-2}; इसलिए $\sqrt{km} = 4.243$ kg s^{-1} और $b = 0.04$ kg s^{-1} अत: $b\sqrt{km}$ से अति निम्न है। समीकरण (14.34) से आवर्त काल T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ \text{kg}}{90\ \text{N m}^{\pm1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) अब, समीकरण (14.33) से, वह समय, $T_{1/2}$ जिसमें आयाम घटकर अपने आरंभिक आयाम का आधा रह जाता है,

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) वह समय $t_{1/2}$, जिसमें दोलन की यांत्रिक ऊर्जा घटकर अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित करने के लिए हमें समीकरण (14.35) की सहायता लेनी होती है । इस समीकरण से,

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

अथवा $$\tfrac{1}{2} = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

अथवा $$t_{1/2} = \frac{0.693}{40\ \text{g s}^{-1}} \times 200\text{g}$$

$$= 3.46\ \text{s}$$

यह वास्तव में क्षय काल का आधा है। यह उचित ही है क्योंकि समीकरण (14.33) और (14.35) के अनुसार ऊर्जा आयाम के वर्ग पर निर्भर करती है। ध्यान दें कि दोनों समीकरणों के घातांकों में गुणज 2 है। ◀

14.10 प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद

किसी ऐसे झूले पर झूलता कोई व्यक्ति जिसे कोई धक्का नहीं मिल रहा है अथवा लोलक जिसे विस्थापित करके छोड़ दिया गया हो, मुक्त दोलनों के उदाहरण हैं । इन दोनों स्थितियों में दोलनों का आयाम धीरे-धीरे कम होगा और अंततः निकाय रुक जाएगा । सदैव उपस्थित रहने वाले क्षय-बलों के कारण व्यवहार में मुक्त दोलनों को बनाए नहीं रखा जा सकता । वे अनुभाग 14.9 में किए गए वर्णन के अनुसार अवमंदित हो जाते हैं । परंतु झूला झूलते समय यदि आप अपने पैरों से फर्श को धक्का देकर आवर्ती बल आरोपित करें, तो आप यह पाते हैं कि न केवल अब दोलनों को अनुरक्षित किया जा सकता है वरन् उनका आयाम भी बढ़ाया जा सकता है । इन अवस्थाओं के अंतर्गत झूले में **प्रणोदित,** अथवा **परिचालित दोलन** होते हैं। उस स्थिति में जब कोई निकाय किसी सरल आवर्त बल के कार्यरत होने के कारण प्रणोदित दोलन करता है, तब दो कोणीय आवृत्तियाँ महत्वपूर्ण हैं : (1) निकाय की **प्राकृतिक** कोणीय आवृत्ति ω, यह वह कोणीय आवृत्ति होती है जिससे वह साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापित करके मुक्त छोड़ने पर दोलन करता है, तथा (2) प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की कोणीय आवृत्ति ω_d ।

मान लीजिए किसी अवमंदित दोलक पर कोई समय के साथ विचरण करने वाले आयाम का आवर्ती बाह्य बल $F(t)$ आरोपित किया जाता है । इस बल को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$F(t) = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

समीकरण (14.36) द्वारा निरूपित किसी कण का रैखिक प्रत्यानयन बल, अवमंदित बल तथा कालाश्रित प्रणोदित बल के संयोजी प्रभाव के अंतर्गत गति को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - bv(t) + F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

समीकरण (14.37a) में त्वरण को d^2x/dt^2 द्वारा प्रतिस्थापित तथा उसे पुनर्व्यवस्थित करने पर,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37b)$$

उपरोक्त m द्रव्यमान वाले दोलित्र जिस पर ω_d आवृत्ति वाला बल कार्यरत है का गति का समीकरण है। प्रारंभ में दोलित्र अपने प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन करता है जब हम इस पर एक बाह्य आवृत्ति बल लगाते हैं तो प्राकृतिक आवृत्ति वाला दोलन क्षीण हो जाता है और वस्तु आरोपित बाह्य बल के आवृत्ति से दोलन करने लगता है। प्राकृतिक दोलन के शांत हो जाने के उपरांत दोलित्र का विस्थापन होता है

$$x(t) = A\cos(\omega_d t + \phi) \qquad (14.38)$$

जहाँ t आवृत्ति बल के लगाए जाने के क्षण से मापा समय है।

आयाम A कोणीय आवृत्तियों ω_d तथा प्राणोदित आवृत्ति ω का फलन है जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$A = \frac{F_o}{\left\{m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right\}^{1/2}} \qquad (14.39a)$$

तथा $$\tan\phi = \frac{-v_o}{\omega_d x_o} \qquad (14.39b)$$

यहाँ m कण का द्रव्यमान तथा v_0 और x_0 समय $t = 0$ पर कण के क्रमशः वेग और विस्थापन हैं । यह वह क्षण है जब हम आवर्ती बल आरोपित करते हैं।

समीकरण (14.39) दर्शाता है कि आयाम परिचालन बल की (कोणीय) आवृत्ति पर निर्भर करता है। ω_d के ω से अत्यधिक भिन्न होने और समीप होने की अवस्थाओं में हम दोलित्र का भिन्न-भिन्न व्यवहार देखते हैं। अब हम इन दोनों परिस्थितियों पर विचार करते हैं:

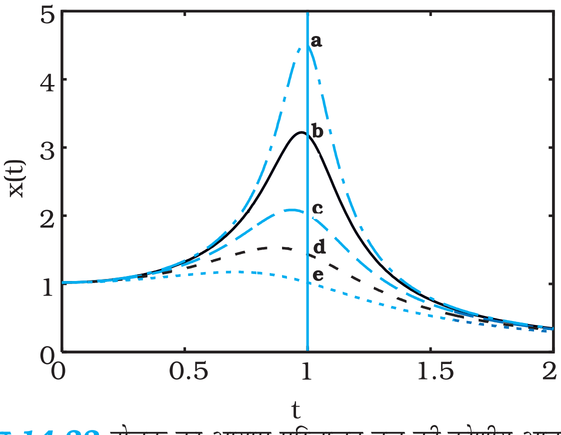
(a) ***अल्प अवमंदन जब परिचालक आवृत्ति प्राकृतिक आवृत्ति से अधिक भिन्न है:*** इस स्थिति में $\omega_d b$, $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ से अति कम होगा। अतः समीकरण 14.39(a) में उस पद को नगण्य मान सकते हैं:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \qquad (14.40)$$

चित्र 14.22 में निकाय में उपस्थित विभिन्न सीमाओं के अवमंदक बलों के लिए किसी दोलक के विस्थापन आयाम की परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति पर निर्भरता दर्शायी गई है। ध्यान दीजिए, तीनों परिस्थितियों में $\omega_d/\omega = 1$ होने पर ही आयाम अधिकतम होता है। इस चित्र के वक्र यह दर्शाते हैं कि अवमंदन कम होने पर ऊँचा और संकीर्ण **अनुनाद** शिखर प्राप्त होता है।

यदि हम परिचालक आवृत्ति को बदलते रहें तो जब यह आवृत्ति वस्तु की प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो दोलन का आयाम अनंत की ओर अग्रसर होता है। परन्तु यह शून्य अवमंदन की आदर्श स्थिति होती है जो किसी वास्तविक निकाय में नहीं होती है क्योंकि अवमंदन किसी भी अवस्था में पूर्ण रूप से शून्य नहीं हो सकता। आपने झूला झूलते हुए निश्चय ही अनुभव किया होगा कि जब आप झूले पर इस आवृत्ति से बल लगाते हैं कि बल का आवर्तकाल झूले के प्राकृतिक आवर्तकाल के बराबर होता है तो झूले के दोलन का आयाम अधिकतम होता है। यह आयाम अधिक तो होता है परन्तु अनंत नहीं होता है। क्योंकि झूले की दोलन गति में कुछ न कुछ अवमंदन तो होता ही है। यह अगले भाग (b) में स्पष्ट हो जाएगा।

(b) ***जब परिचालक आवृत्ति प्राकृतिक आवृत्ति के निकट हो :*** यदि ω, ω_d के अति निकट हो $m(\omega^2-\omega_d^2)$, b के उचित मानों के लिए $\omega_d b$ से बहुत कम होगा। इस अवस्था में समीकरण (14.39) हो जाता है।



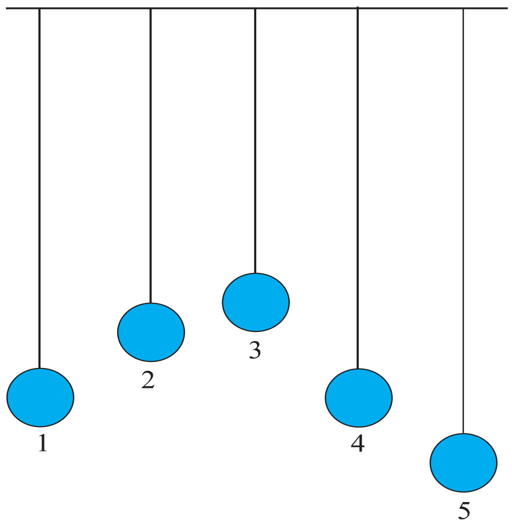
*चित्र 14.22 दोलक का आयाम परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति के फलन के रूप में। $\omega_d/\omega = 1$ पर आयाम अधिकतम है, जो अनुनाद की शर्त होती है। पाँचों वक्र निकाय में उपस्थित अवमंदन की विभिन्न सीमाओं के तदनुरूपी हैं। वक्र **a** अल्पतम अवमंदन के लिए है तथा अवमंदन वक्र **b, c, d, e** में क्रम से बढ़ता है। ध्यान दें कि शिखर **b** के मान में वृद्धि से बाईं ओर विस्थापित होता है।*

$$A = \frac{F_o}{\omega_d b} \qquad (14.41)$$

इससे स्पष्ट है कि किसी निश्चित परिचालक आवृत्ति के लिए अधिकतम संभव आयाम परिचालक आवृत्ति तथा अवमंदन पर निर्भर करता है और इस प्रकार कभी भी अनंत नहीं होता। परिचालक आवृत्ति का वस्तु के दोलन के प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर होने की स्थिति में दोलन के आयाम के अधिकतम होने की परिघटना को **अनुनाद** कहते हैं।

अपने दैनिक जीवन में हमें अनुनाद से संबंधित परिघटनाएँ देखने को मिलती हैं। झूलों से झूलने का हमारा अनुभव अनुनाद का अच्छा उदाहरण है। आपने यह अनुभव किया होगा कि झूले को अधिक ऊँचाई तक झुलाने की कुशलता धरती पर जोर लगाने की लय को झूले की प्राकृतिक आवृत्ति के समकालिक बनाने में है।

इस तथ्य की और अधिक व्याख्या करने के लिए मान लीजिए चित्र 14.23 की भाँति एक ही डोरी से वर्गीकृत लंबाइयों के 5 सरल लोलक लटकाये गए हैं। लोलक 1 व 4 की लंबाइयां समान हैं तथा अन्य तीनों की लंबाइयाँ भिन्न-भिन्न हैं। अब हम लोलक 1 को गतिमान बनाते हैं। संबद्ध डोरी से होकर ऊर्जा इस लोलक से अन्य लोलकों को स्थानांतरित होती है, फलस्वरूप वे दोलन करने लगते हैं। संबद्ध डोरी द्वारा परिचालन बल प्रदान किया जाता है। इस परिचालन बल की आवृत्ति लोलक 1 के दोलन की आवृत्ति के समान होती है। यदि हम लोलकों 2, 3 तथा 5 की अनुक्रियाओं का अवलोकन करें, तो हम यह पाते हैं कि आरंभ में वे सभी विभिन्न आयामों से अपनी-अपनी प्राकृतिक आवृत्तियों के दोलन करते हैं, परंतु ये



चित्र 14.23 एक ही डोरी से निलंबित 5 सरल लोलकों का निकाय।

गतियाँ अत्यधिक अवमंदित होती हैं और कायम नहीं रह पातीं। धीरे-धीरे उनके दोलन की आवृत्तियाँ परिवर्तित होती हैं और अंत में वे लोलक 1 की आवृत्ति अर्थात् परिचालन बल की आवृत्ति से भिन्न-भिन्न आयामों से दोलन करते हैं । ये दोलन आयाम छोटे होते हैं किन्तु लोलक 4 की अनुक्रिया अन्य तीनों लोलकों से विपरीत होती है । यह लोलक 1 की ही आवृत्ति से दोलन करता है परंतु इसका आयाम धीरे-धीरे बढ़ता हुआ अत्यधिक हो जाता है । अनुनाद की भाँति अनुक्रिया दिखाई देती है । ऐसा होने का कारण यह है कि यहाँ अनुनाद की शर्त, अर्थात् निकाय की प्राकृतिक आवृत्ति परिचालन बल की आवृत्ति के संपाती होनी चाहिए, संतुष्ट होती है ।

सभी यांत्रिक संरचनाओं की एक या अधिक प्राकृतिक आवृत्तियाँ होती हैं, तथा यदि किसी संरचना पर कोई प्रबल बाह्य परिचालन बल आरोपित है जिसकी आवृत्ति संरचना की किसी एक प्राकृतिक आवृत्ति से सुमेलित है तो संरचना में उत्पन्न परिणामी दोलन उस संरचना को भंग कर सकते हैं । टाकोम नैरोज ब्रिज जो कि पुगेट साउंड, वाशिंगटन, संयुक्त राज्य अमेरिका में स्थित है, को 1 जुलाई सन् 1940 को यातायात के लिए खोला गया । चार माह पश्चात्, पवनों द्वारा उत्पन्न स्पंदमान परिणामी बल की आवृत्ति और ब्रिज की प्राकृतिक आवृत्ति में अनुनाद हो गया । जिसके कारण ब्रिज के दोलनों के आयाम में स्थायी वृद्धि होती रही और अंत में ब्रिज टूट गया । यही कारण है कि जब परेड करते हुए चलने वाले सिपाही किसी ब्रिज को पार करते हैं, तब कदम-ताल मिलाकर चलने का क्रम तोड़ देते हैं। वायुयान अभिकल्पनाकार यह सुनिश्चित करते हैं कि उड़ान के दौरान इंजन की आवृत्ति का पंखे के दोलन की किसी भी संभावित प्राकृतिक आवृत्ति से सुमेल न हो । भूकंपों से अत्यधिक विनाश होता है । ध्यान देने योग्य एक रोचक बात यह है कि कभी-कभी किसी भूकंप से छोटी या ऊँची इमारतें प्रभावित नहीं होतीं, जबकि मध्यम ऊँचाई की इमारतें धराशायी हो जाती हैं । इसका कारण यह है कि कम ऊँचाई की इमारतों की प्राकृतिक आवृत्ति भूकंपी तरंगों की आवृत्ति से अधिक होती है जबकि ऊँची इमारतों की प्राकृतिक आवृत्ति भूकंपी तरंगों की आवृत्ति से अपेक्षाकृत कम होती है ।

सारांश

1. वे गतियाँ जो स्वयं दोहराती हैं *आवर्ती गतियाँ* कहलाती हैं ।
2. एक दोलन अथवा चक्र को पूरा करने के लिए आवश्यक समय T को *आवर्तकाल* कहते हैं । यह आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित है,

$$T = \frac{1}{\nu}$$

किसी आवर्ती अथवा दोलनी गति की *आवृत्ति* उसके द्वारा 1 सेकंड में पूरे किए गए दोलनों की संख्या होती है । SI मात्रक पद्धति में इसे हर्ट्ज़ में मापा जाता है;

1 हर्ट्ज़ = 1Hz = 1 दोलन प्रति सेकंड = $1 s^{-1}$

3. *सरल आवर्त गति* में, किसी कण का उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन $x(t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(विस्थापन)}$$

यहाँ x_m *विस्थापन का आयाम* $(\omega t + \phi)$ *गति की कला,* तथा ϕ *कला स्थिरांक* है । कोणीय आवृत्ति ω गति के आवर्तकाल तथा आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित होती है

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

4. सरल आवर्त गति, एकसमान वर्तुल गति के उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है, जिस पर गति हो रही है ।
5. सरल आवर्त गति के समय कण के वेग तथा त्वरण को समय t के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\upsilon(t) = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{(वेग)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \quad \text{(त्वरण)}$$

समयकालिक क्रिया और सरल आवर्त गति द्वारा हम वेग और गति को इस प्रकार देख सकते हैं।

6. सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर कोई ऐसा बल आरोपित रहता है, जो कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती, तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है ।

7. सरल आवर्त गति करते किसी कण में, किसी भी क्षण, गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ होती है। यदि कोई घर्षण न हो, तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा, $E = K+U$ सदैव ही अचर रहती है यद्यपि K और U परिवर्तित होते हैं ।

8. m द्रव्यमान का कोई कण जो हुक के नियम के अनुसार लगे प्रत्यानयन बल $F = -kx$ के प्रभाव में दोलन करता है, सरल आवर्त गति दर्शाता है जिसके लिए,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

तथा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(आवर्तकाल)}$$

ऐसे निकाय को रैखिक दोलक भी कहते हैं ।

9. लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । इसका आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. किसी भी वास्तविक दोलायनमान निकाय की यांत्रिक ऊर्जा दोलन करते समय घट जाती है क्योंकि बाह्य बल जैसे कर्षण दोलनों को रोकते हैं तथा यांत्रिक ऊर्जा को ऊष्मीय ऊर्जा में स्थानांतरित कर देते हैं । तब वास्तविक दोलक तथा उसकी गति को *अवमंदित गति* कहते हैं । यदि *अवमंदन बल* $F_d = -bv$ है, यहाँ v दोलक का वेग तथा b *अवमंदन स्थिरांक* है, तब दोलक का विस्थापन,

$$x(t) = A\,e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

यहाँ ω', अवमंदित दोलनों की कोणीय आवृत्ति है जिसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

यदि अवमंदन स्थिरांक का मान कम है, तो $\omega' \approx \omega$, यहाँ ω अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति है । अवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा E को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-bt/m}$$

11. यदि प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति ω के किसी दोलायमान निकाय पर ω_d कोणीय आवृत्ति का कोई बाह्य आवर्ती बल आरोपित किया जाए, तो वह निकाय ω_d कोणीय आवृत्ति से दोलन करता है । इन दोलनों का आयाम तब अधिक होता है जब,

$$\omega_d = \omega$$

जो *अनुनाद* की शर्त होती है ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
आवर्तकाल	T	[T]	s	गति की स्वयं पुनरावृत्ति के लिए न्यूनतम समय
आवृत्ति	f या ν	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
कोणीय आवृत्ति	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$= 2\pi\nu$
कला नियतांक	ϕ	विमाहीन	रेडियन	सरल आवर्त गति में विस्थापन की कला का आरंभिक मान
बल नियतांक	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	सरल आवर्त गति में $F = -k\,x$

विचारणीय विषय

1. आवर्तकाल T वह *न्यूनतम समय* होता है जिसके पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार, समय अंतराल nT के पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है, यहाँ n कोई पूर्णांक है।
2. प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती। केवल वही आवर्ती गति जो बल-नियम $F = -k\,x$ द्वारा नियंत्रित होती है, सरल आवर्त गति होती है।
3. वर्तुल गति व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल (जैसे ग्रहीय गति में) तथा द्विविमा में सरल आवर्त बल $-m\omega^2 r$ के कारण उत्पन्न हो सकती है। बाद के प्रकरण में, गति की कलाएँ, दो लंबवत् दिशाओं (x तथा y) में $\pi/2$ rad द्वारा भिन्न होनी चाहिए। इस प्रकार, कोई कण जिसकी आरंभिक स्थिति (o, a) तथा वेग $(\omega A, o)$ है $-m\,\omega^2 r$ बल आरोपित किए जाने पर A त्रिज्या के वृत्त में एकसमान वर्तुल गति करेगा।
4. ω के किसी दिए गए मान की रैखिक सरल आवर्त गति के लिए दो यादृच्छिक आरंभिक शर्तें आवश्यक हैं और ये शर्तें गति को पूर्णतः निर्धारित करने के लिए पर्याप्त हैं। ये आवश्यक शर्तें हो सकती हैं (i) आरंभिक स्थिति तथा आरंभिक वेग, अथवा (ii) आयाम तथा कला, अथवा (iii) ऊर्जा तथा कला।
5. उपरोक्त बिंदु (4) से, दिए गए आयाम अथवा ऊर्जा गति की कला का निर्धारण आरंभिक स्थिति अथवा आरंभिक वेग द्वारा किया जाता है।
6. यादृच्छिक आयामों तथा कलाओं वाली दो सरल आवर्त गतियों का संयोजन व्यापक रूप में आवर्ती नहीं होता। यह केवल तभी आवर्ती होता है जब एक गति की आवृत्ति दूसरी गति की आवृत्ति की पूर्णांक गुणज हो। तथापि, किसी आवर्ती गति को सदैव ही उपयुक्त आयामों की अनंत सरल आवर्त गतियों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
7. सरल आवर्त गति का आवर्तकाल आयाम अथवा ऊर्जा अथवा कला नियतांक पर निर्भर नहीं करता। गुरुत्वाकर्षण के अधीन ग्रहीय कक्षों के आवर्तकाल इसके विपरीत हैं (केप्लर का तृतीय नियम)।
8. किसी सरल लोलक की गति लघु कोणीय विस्थापन के लिए ही सरल आवर्त गति होती है।
9. किसी कण की गति यदि सरल आवर्त गति है, तो उसके विस्थापन को निम्न रूपों में से किसी एक रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए :

   $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$

   $x = A\cos(\omega t + \alpha);\ x = B\sin(\omega t + \beta)$

   ये तीनों रूप पूर्णतः समतुल्य हैं (किसी भी एक रूप को अन्य दो रूपों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।)

   इस प्रकार अवमंदित सरल आवर्त गति समीकरण (14.31) सही अर्थों में सरल आवर्त गति नहीं होती। यह केवल

$2m/b$ से बहुत छोटे समय अन्तरालों के लिए ही सन्निकटत: सरल आवर्त गति होती है, यहाँ b अवमंदन नियतांक है।

10. प्रणोदित दोलनों में, कण की स्थायी अवस्था गति (प्रणोदित दोलनों की समाप्ति के पश्चात्) एक ऐसी सरल आवर्त गति होती है जिसकी आवृत्ति उस कण की प्राकृतिक आवृत्ति ω नहीं होती वरन् प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की आवृत्ति ω_d होती है।

11. शून्य अवमंदन की आदर्श अवस्था में न होने की स्थिति में अनुनाद पर सरल आवर्त गति का आयाम अनंत होता है। यह कोई समस्या नहीं है, क्योंकि सभी वास्तविक निकायों में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य ही होता है, चाहे यह छोटा ही क्यों न हो।

12. प्रणोदित दोलनों के अधीन, कण की सरल आवर्त गति की कला प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की कला से भिन्न होती है।

अभ्यास

14.1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है ?

(i) किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।

(ii) किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।

(iii) अपने द्रव्यमान केंद्र के परित: घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।

(iv) किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

14.2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं ?

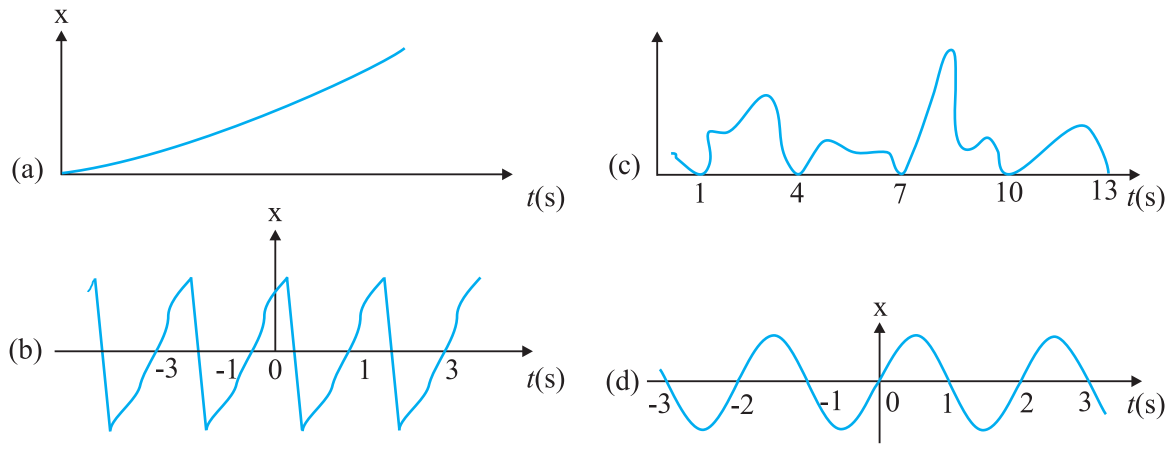
(i) पृथ्वी की अपने अक्ष के परित: घूर्णन गति।

(ii) किसी U–नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।

(iii) किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिंदु से कुछ ऊपर के बिंदु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।

(iv) किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परित: व्यापक कंपन।

14.3 चित्र 14.24 में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है ? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।



चित्र 14.24

14.4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\,\omega t\right)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\,\omega t + \cos 5\,\omega t$

(e) $\exp(-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(a) A सिरे पर है,

(b) B सिरे पर है,

(c) A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिंदु पर है,

(d) A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है,

(e) B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है, तथा

(f) A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

14.6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच संबंधों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है :

(a) $a = 0.7\,x$

(b) $a = -200\,x^2$

(c) $a = -10\,x$

(d) $a = 100\,x^3$

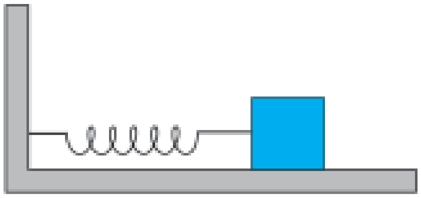
14.7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

यदि कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरंभिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या है ? कण की कोणीय आवृत्ति π s^{-1} है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें; $x = B \sin(\omega t + \alpha)$, तो उपरोक्त आरंभिक प्रतिबंधों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा ?

14.8 किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक अंकित है और पैमाने की लंबाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है ?

14.9 1200 N m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र 14.25 में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींच कर मुक्त किया जाता है,



चित्र 14.25

(i) पिण्ड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिण्ड का अधिकतम त्वरण, तथा

(iii) पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

14.10 अभ्यास 14.9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप मे दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरंभ ($t = 0$) करते समय पिण्ड,

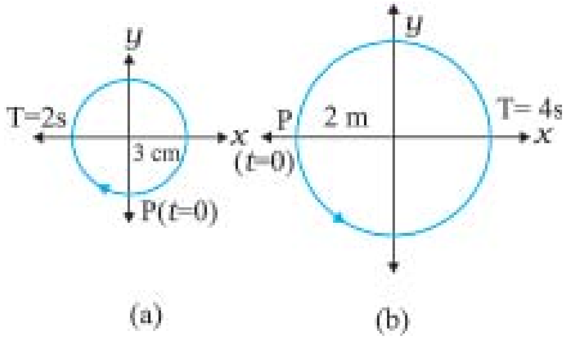
(a) अपनी माध्य स्थिति,

(b) अधिकतम तानित स्थिति, तथा

(c) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरंभिक कला में किस रूप में भिन्न हैं ?

14.11 चित्र 14.26 में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तदनुरूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्य, परिक्रमण-काल, आरंभिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।



चित्र 14.26

14.12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)

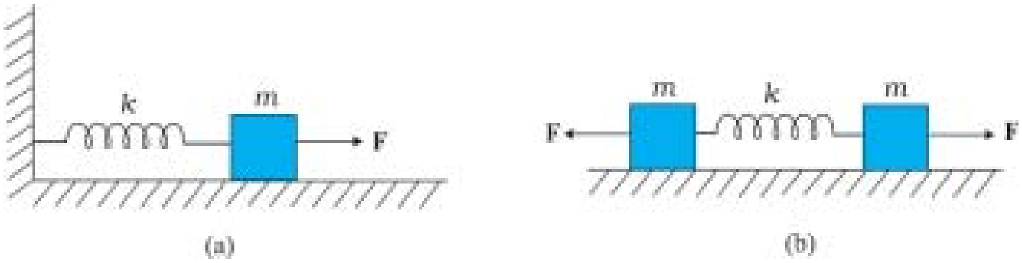
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 चित्र 14.27(a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल **F** आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र 14.30(b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र 14.30 में समान बल **F** द्वारा तानित किया गया है।



चित्र 14.27

(a) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(b) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

14.14 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दो गुना) 1.0 m का है । यदि पिस्टन 200 rad/min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है ?

14.15 चंद्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण $1.7\ m\ s^{-2}$ है । यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5 s है, तो उसका चंद्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा ? (पृथ्वी के पृष्ठ पर $g = 9.8\,m\ s^{-2}$)

14.16 नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किसी कण की सरल आवर्त गति के आवर्तकाल का मान उस कण के द्रव्यमान तथा बल-स्थिरांक पर निर्भर करता है : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ । कोई सरल लोलक सन्निकट सरल आवर्त गति करता है । तब फिर किसी लोलक का आवर्तकाल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता ?

(b) किसी सरल लोलक की गति छोटे कोण के सभी दोलनों के लिए सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । बड़े कोणों के दोलनों के लिए एक अधिक गूढ़ विश्लेषण यह दर्शाता है कि T का मान $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से अधिक होता है । इस परिणाम को समझने के लिए किसी गुणात्मक कारण का चिंतन कीजिए ।

(c) कोई व्यक्ति कलाई घड़ी बाँधे किसी मीनार की चोटी से गिरता है । क्या मुक्त रूप से गिरते समय उसकी घड़ी यथार्थ समय बताती है ?

(d) गुरुत्व बल के अंतर्गत मुक्त रूप से गिरते किसी केबिन में लगे सरल लोलक के दोलन की आवृत्ति क्या होती है?

14.17 किसी कार की छत से l लंबाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है । कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल v से गतिमान है । यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल क्या होगा ?

14.18 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है । कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल

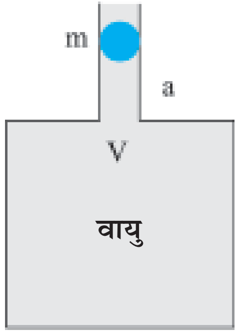
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_l g}}$$ है ।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए) ।

14.19 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पंप से जुड़ा है, तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया गया है । दोनों स्तंभों में कुछ दाबांतर बनाए रखा जाता है । यह दर्शाइए कि जब चूषण पंप को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तंभ सरल आवर्त गति करता है ।

अतिरिक्त अभ्यास

14.20 चित्र 14.28 में दर्शाए अनुसार V आयतन के किसी वायु कक्ष की ग्रीवा (गर्दन) की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल a है। इस ग्रीवा में m द्रव्यमान की कोई गोली बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे गति कर सकती है । यह दर्शाइए कि जब गोली को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ देते हैं, तो वह सरल आवर्त गति करती है । दाब-आयतन विचरण को समतापी मानकर दोलनों के आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए [चित्र 14.28 देखिए]।



चित्र 14.28

14.21 आप किसी 3000 kg द्रव्यमान के स्वचालित वाहन पर सवार हैं । यह मानिए कि आप इस वाहन की निलंबन प्रणाली के दोलनी अभिलक्षणों का परीक्षण कर रहे हैं । जब समस्त वाहन इस पर रखा जाता है, तब निलंबन 15 cm आनमित होता है । साथ ही, एक पूर्ण दोलन की अवधि में दोलन के आयाम में 50% घटोतरी हो जाती है । निम्नलिखित के मानों का आकलन कीजिए :

(a) कमानी स्थिरांक, तथा

(b) कमानी तथा एक पहिए के प्रघात अवशोषक तंत्र के लिए अवमंदन स्थिरांक b

यह मानिए कि प्रत्येक पहिया 750 kg द्रव्यमान वहन करता है ।

14.22 यह दर्शाइए कि रैखिक सरल आवर्त गति करते किसी कण के लिए दोलन की किसी अवधि की औसत गतिज ऊर्जा उसी अवधि की औसत स्थितिज ऊर्जा के समान होती है ।

14.23 10 kg द्रव्यमान की कोई वृत्तीय चक्रिका अपने केंद्र से जुड़े किसी तार से लटकी है । चक्रिका को घूर्णन देकर तार में ऐंठन उत्पन्न करके मुक्त कर दिया जाता है । मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल 1.5 s है । चक्रिका की त्रिज्या 15 cm है । तार का मरोड़ी कमानी नियतांक ज्ञात कीजिए । [मरोड़ी कमानी नियतांक α संबंध $J = -\alpha\,\theta$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ J प्रत्यानयन बल युग्म है तथा θ ऐंठन कोण है]

14.24 कोई वस्तु 5 cm के आयाम तथा 0.2 सेकंड की आवृत्ति से सरल आवृत्ति गति करती है। वस्तु का त्वरण तथा वेग ज्ञात कीजिए जब वस्तु का विस्थापन (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm हो।

14.25 किसी कमानी से लटका एक पिण्ड एक क्षैतिज तल में कोणीय वेग ω से घर्षण या अवमंदन रहित दोलन कर सकता है। इसे जब x_0 दूरी तक खींचते हैं और खींचकर छोड़ देते हैं तो यह संतुलन केन्द्र से समय $t = 0$ पर v_0 वेग से गुजरता है। प्राचल ω, x_0 तथा v_0 के पदों में परिणामी दोलन का आयाम ज्ञात करिये। [संकेत: समीकरण $x = a \cos(\omega t+\theta)$ से प्रारंभ कीजिए। ध्यान रहे कि प्रारंभिक वेग ऋणात्मक है।]