अध्याय 15

तरंगें

15.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने ऐसे पिण्डों की गति के बारे में अध्ययन किया जो एकाकी दोलन करते हैं। यदि कोई निकाय इसी प्रकार के पिण्डों का समूह है, तो उस निकाय में क्या होगा? एक द्रव्यमान युक्त माध्यम इसी प्रकार के निकाय का उदाहरण है। इस प्रकार के माध्यम में प्रत्यास्थ बल माध्यम के अवयवों को एक-दूसरे से बाँध रखते हैं जिसके कारण किसी एक अवयव की गति दूसरे अवयव की गति को प्रभावित करती है। यदि आप एक छोटे कंकड़ को किसी तालाब के शांत जल में धीरे से गिराएँ, तो जल का पृष्ठ विक्षुब्ध हो जाता है । यह विक्षोभ किसी एक स्थान तक ही सीमित नहीं रहता, वरन् एक वृत्त के अनुदिश बाहर की ओर संचरित होता है। यदि आप इसी प्रकार तालाब में निरंतर कंकड़ गिराते रहें, तो आप यह देखेंगे कि तालाब के पृष्ठ के जिस बिंदु पर विक्षोभ उत्पन्न हुआ है वहाँ से यह विक्षोभ वृत्तों के रूप में तीव्रता से बाहर की ओर गति करता है । हमें ऐसा प्रतीत होता है जैसे विक्षोभ बिंदु से जल स्वयं बाहर की ओर गति कर रहा हो । यदि आप विक्षुब्ध पृष्ठ पर कुछ छोटे-छोटे कॉर्क के टुकड़े धीरे से रख दें, तो आप पाएँगे कि ये कॉर्क के टुकड़े अपने-अपने स्थानों पर ही ऊपर-नीचे गति करते हैं, परंतु विक्षोभ के केंद्र बिंदु से दूर नहीं जाते अर्थात् उनकी विक्षोभ के केंद्र से दूरी नियत बनी रहती है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि जल का द्रव्यमान स्वयं वृत्तों के साथ बाहर की ओर गति नहीं करता, बस, एक गतिशील विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है । इसी प्रकार जब हम बोलते हैं, तो ध्वनि हवा (माध्यम) में हमसे दूर जाती है । परंतु इस प्रक्रिया में (वायु) एक भाग से दूसरे भाग में प्रवाहित नहीं होती। वायु में उत्पन्न हुए विक्षोभ हमें स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देते, हमारे कानों अथवा माइक्रोफोनों द्वारा ही हम इनको जान पाते हैं। इस प्रकार के विक्षोभों के प्रतिरूप या पैटर्न जो द्रव्य के वास्तविक भौतिक स्थानांतरण अथवा समूचे द्रव्य के प्रवाह के बिना ही माध्यम के एक स्थान से दूसरे स्थान तक गति करते हैं, **तरंग** कहलाते हैं । इस अध्याय में हम तरंगों के विषय में अध्ययन करेंगे ।

किसी भी तरंग के द्वारा एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक सूचना तथा ऊर्जा का संकेतों (सिगनलों) के रूप में संचरण होता है, परंतु कोई भी द्रव्यात्मक पिण्ड गति नहीं करता । हमारा समस्त संचार-तंत्र तरंगों द्वारा संकेतों के संचरण पर निर्भर करता है। जब हम अपने से दूर बैठे किसी मित्र से टेलीफोन पर बातचीत करते हैं, तब हमारे वाक्-तंतु से उत्पन्न संदेश को ध्वनि तरंगें टेलीफोन तक ले जाती हैं ।

यहाँ एक विद्युत सिगनल उत्पन्न होता है जो ताँबे के तारों के अनुदिश संचरित होता है । यदि दूरी बहुत अधिक है तो उत्पन्न विद्युत सिगनल को किसी प्रकाश सिगनल अथवा विद्युत चुंबकीय तरंगों में रूपांतरित किया जा सकता है और प्रकाशिक तंतुओं अथवा संभवत: संचार उपग्रहों के प्रयोग द्वारा वायुमंडल से इनका संचरण किया जाता है । अभिग्राही छोर पर ये वैद्युत अथवा प्रकाश सिगनल अथवा विद्युत चुंबकीय तरंगें पुन: ध्वनि तरंगों में रूपांतरित होकर टेलीफोन से कानों तक पहुँचती हैं ।

सभी तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । हम जानते हैं कि प्रकाश तरंगें निर्वात से गमन कर सकती हैं । हमसे सैकड़ों प्रकाश वर्ष की दूरी पर स्थित तारों से उत्सर्जित प्रकाश अंतरतारकीय अंतरिक्ष, जो व्यावहारिक रूप से निर्वात ही है, से गमन करता हुआ हम तक पहुँचता है ।

हमारे संपर्क में आने वाली तरंगें मुख्यत: तीन प्रकार की होती हैं : (क) यांत्रिक तरंगें, (ख) विद्युत चुंबकीय तरंगें तथा (ग) द्रव्य तरंगें । इनमें यांत्रिक तरंगें सबसे अधिक परिचित तरंगें हैं क्योंकि इनसे हमारा निरंतर संपर्क रहता है; जल-तरंगें, ध्वनि तरंगें, भूकंपी तरंगें आदि इन तरंगों के सामान्य उदाहरण हैं । इन सभी यांत्रिक तरंगों के कुछ प्रमुख लक्षण होते हैं – ये तरंगें न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं तथा ये केवल द्रव्यात्मक माध्यमों ; जैसे–जल, वायु तथा चट्टानों में ही पाई जा सकती हैं । दृश्य तथा पराबैंगनी प्रकाश, रेडियो तथा टेलीविजन तरंगें, सूक्ष्म तरंगें, X-किरणें, आदि विद्युत चुंबकीय तरंगों के सामान्य उदाहरण हैं । सभी विद्युत चुंबकीय तरंगें निर्वात में समान चाल c, जिसका मान नीचे दिया गया है, से गमन करती हैं :

$$c = 29{,}97{,}92{,}458 \text{ m s}^{-1} \text{ (प्रकाश की चाल)} \qquad (15.1)$$

यांत्रिक तरंगों के विपरीत विद्युत चुंबकीय तरंगों को अपने संचरण के लिए किसी द्रव्यात्मक माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । इन तरंगों के बारे में अधिक अध्ययन आप अगली कक्षाओं में करेंगे ।

द्रव्य तरंगें गतिशील इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनों, न्यूट्रॉनों तथा अन्य मूल कणों, यहाँ तक कि परमाणुओं तथा अणुओं से संबद्ध होती हैं । क्योंकि सामान्यत: इन तरंगों को हम द्रव्य से बना हुआ मानते हैं, इसीलिए इन तरंगों को **द्रव्य तरंगें** कहते हैं । ये तरंगें प्रकृति के क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में प्रकट होती हैं जिसके विषय में आप अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे । यद्यपि ये तरंगें संकल्पनात्मक रूप में यांत्रिक तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों की तुलना में अधिक अमूर्त हैं, तथापि इनका अनुप्रयोग आधुनिक प्रौद्योगिकी की बहुत सी मूल युक्तियों में पाया जाता है; इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है ।

इस अध्याय में हम केवल यांत्रिक तरंगों के बारे में, जिनके संचरण के लिए द्रव्यात्मक माध्यम आवश्यक है, अध्ययन करेंगे ।

पुरातन काल से ही हमारी कला तथा साहित्य पर तरंगों का सौंदर्यबोधात्मक प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, फिर भी तरंग गति का वैज्ञानिक विश्लेषण सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में किया गया था । क्रिश्चियन हाइगेन्स (1629-1695), राबर्ट हुक तथा आइज़क न्यूटन कुछ ऐसे प्रसिद्ध भौतिकविद हैं जिनके नाम तरंग गति की भौतिकी से संबद्ध हैं । कमानी से बँधे पिण्डों के दोलनों की भौतिकी तथा सरल लोलक की भौतिकी के पश्चात् ही तरंगों की भौतिकी को समझा गया । प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंगों का आवर्ती दोलनों के साथ अंतरंग संबंध होता है । (तानित डोरियाँ, कुंडलित कमानियाँ, वायु आदि प्रत्यास्थ माध्यमों के उदाहरण हैं ।) इस संबंध की व्याख्या हम सरल उदाहरणों द्वारा करेंगे ।

चित्र 15.1 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से संबद्ध कमानियों की व्यवस्था पर विचार कीजिए । यदि इसके एक सिरे की कमानी को यकायक खींचकर छोड़ दें, तो उत्पन्न विक्षोभ दूसरे सिरे तक गमन करता है । इस प्रक्रिया में क्या होता है ? यकायक खींचने पर पहली कमानी अपनी साम्यावस्था की लंबाई से विक्षोभित होती है । चूँकि दूसरी कमानी पहली कमानी से संबद्ध है, अत: उसमें तनाव अथवा संपीडन होता है और इस प्रकार यह प्रक्रिया आगे बढ़ती जाती है । यहाँ विक्षोभ तो एक सिरे से दूसरे तक संचरित हो जाता है, परंतु प्रत्येक कमानी अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर ही लघु दोलन करती रहती है । ऐसे ही एक

चित्र 15.1 एक-दूसरे से संबद्ध कमानियों का संग्रह । सिरे A को यकायक खींचा जाता है; तब विक्षोभ दूसरे सिरे तक संचरित हो जाता है ।

व्यावहारिक उदाहरण के रूप में रेलवे स्टेशन पर विराम की स्थिति में खड़ी किसी रेलगाड़ी पर विचार कीजिए । रेलगाड़ी के विभिन्न डिब्बे, कमानी युग्मकों द्वारा एक-दूसरे से युग्मित होते हैं । जब इन डिब्बों के किसी एक सिरे से किसी इंजन को जोड़ते हैं, तो वह अपने से अगले डिब्बे को धक्का देता है तथा यह धक्का एक डिब्बे से दूसरे डिब्बे में, दूसरे से फिर तीसरे में, इसी प्रकार आगे संचरित होते हुए आखिरी डिब्बे तक पहुँच जाता है, लेकिन समस्त रेलगाड़ी अपने ही स्थान पर खड़ी रहती है ।

आइए, अब हम वायु में ध्वनि तरंगों के संचरण पर विचार करते हैं । जैसे ही कोई ध्वनि तरंग वायु से होकर गुजरती है, तो वह उस स्थान की वायु के छोटे से क्षेत्र को संपीडित अथवा विस्तारित करती है । इसके कारण उस छोटे क्षेत्र की वायु के घनत्व में, मान लीजिए $(\delta\rho)$, परिवर्तन होता है । दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल होता है, अत: कमानी की ही भाँति इस स्थिति में भी विक्षोभ के अनुक्रमानुपात में 'प्रत्यानयन बल' उत्पन्न हो जाता है । यहाँ इस प्रकरण में, घनत्व में परिवर्तन, कमानी में उत्पन्न संपीडन अथवा विस्तारण के समरूप है । यदि किसी क्षेत्र को संपीडित किया जाता है, तो उस क्षेत्र के अणु बाहर निकलकर समीपवर्ती क्षेत्र में जाने का प्रयास करते हैं । इस प्रकार,

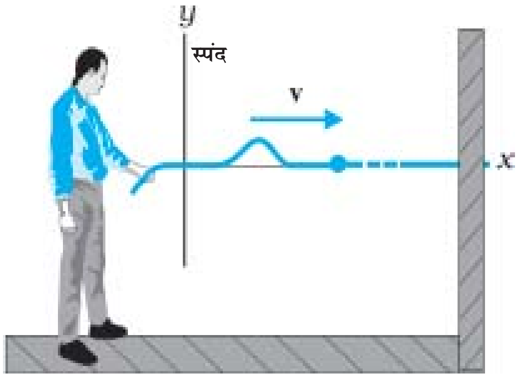
समीपवर्ती क्षेत्र में घनत्व बढ़ता है, अथवा उस क्षेत्र में 'संपीडन' उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती क्षेत्र में 'विरलन' उत्पन्न हो जाता है । यदि कोई क्षेत्र अपने चारों ओर के क्षेत्रों की तुलना में विरलित हो, तो उस क्षेत्र के चारों ओर के परिवेश की वायु उस क्षेत्र में प्रवेश करके विरलन को समीपवर्ती क्षेत्र की ओर धकेल देती है । इस प्रकार, संपीडन अथवा विरलन एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र की ओर गति करते हैं, जिसके कारण वायु में विक्षोभ का संचरण संभव हो पाता है ।

ठोसों में भी इसी के सदृश तर्क दिया जा सकता है । क्रिस्टलीय ठोसों में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह आवर्ती जालकों में व्यवस्थित होते हैं । इनमें, प्रत्येक परमाणु अथवा परमाणुओं का समूह, अपने चारों ओर के परमाणुओं द्वारा आरोपित बलों के कारण, साम्यावस्था में होता है । यदि अन्य परमाणुओं को स्थिर रखते हुए किसी एक परमाणु को विस्थापित किया जाए, तो ठीक उसी प्रकार जैसा कि कमानी के प्रकरण में था, इस स्थिति में भी एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है । अत: हम जालक (lattice) के परमाणुओं को अंत्य बिंदुओं की भाँति ले सकते हैं तथा परमाणु-युगलों के बीच कमानियाँ लगी मान सकते हैं ।

अब हम इस अध्याय के अगले अनुभागों में तरंगों के विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों की चर्चा करेंगे ।

15.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें

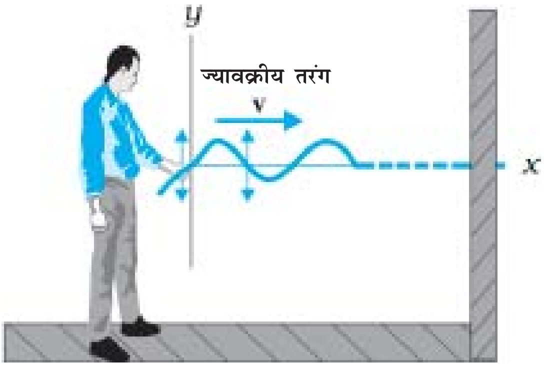
यांत्रिक तरंगों का अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्घ्य होना तरंग संचरण तथा माध्यम में विक्षोभ अथवा विस्थापन की दिशाओं के बीच के संबंध पर निर्भर करता है । इन दोनों में विभेदन के लिए किसी ऐसी तानित डोरी की अनुक्रिया पर विचार करते हैं जिसका एक सिरा किसी सुदृढ़ टेक से बँधा है । यदि आप चित्र 15.2 में दर्शाए अनुसार इस डोरी के एक सिरे को यकायक ऊपर-नीचे एक झटका दें तो एकल **स्पंद** के रूप में एक तरंग डोरी के अनुदिश गमन करती है । हम यह मानते हैं कि स्पंद के आकार की तुलना में डोरी की लंबाई बहुत अधिक है तथा डोरी के दूसरे सिरे तक पहुँचने से पहले ही स्पंद नष्ट हो जाता है, अत: दूसरे सिरे से स्पंद के परावर्तित होने की संभावना की उपेक्षा की जा सकती है । तनाव में होने के कारण ही डोरी में यह स्पंद बनता और गति करता है । जब आप डोरी के अपनी तरफ वाले सिरे को ऊपर की दिशा में खींचते हैं, तो यह डोरी के संलग्न भाग को, डोरी के दोनों भागों के बीच तनाव होने के कारण, ऊपर की दिशा में खींचना आरंभ कर देती है । जैसे ही डोरी का संलग्न भाग ऊपर की दिशा में गति करने लगता है, यह अपने से अगले संलग्न भाग को ऊपर की दिशा में खींचना आरंभ कर देता है और यह प्रक्रिया क्रमवार आगे बढ़ती जाती है । इस बीच आप डोरी के अपनी तरफ वाले सिरे को नीचे की दिशा में खींच लेते हैं । जैसे-जैसे डोरी का प्रत्येक भाग ऊपर की दिशा में गति करता जाता है उसे उसके समीप के वे भाग, जो पहले से ही नीचे की दिशा में गतिमान होते हैं, नीचे की दिशा में वापस खींचना आरंभ कर देते हैं । इसका नेट परिणाम यह होता है कि डोरी की आकृति में विरूपण (स्पंद) डोरी के अनुदिश किसी निश्चित वेग $\mathbf{v}$ से गमन करता है ।



चित्र 15.2 तानित डोरी के अनुदिश कोई एकल स्पंद भेजा जाता है । डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव (जैसे डोरी का वह भाग जिस पर बिंदु अंकित है) स्पंद के गमन के समय पहले ऊपर की दिशा और फिर नीचे की दिशा में गति करता है । डोरी के इस अवयव की गति की दिशा तरंग गति की दिशा के लंबवत होती है ।

यदि आप डोरी के अपनी ओर वाले सिरे को निरंतर ऊपर-नीचे गति कराते रहें, तो एक सतत् तरंग डोरी के अनुदिश वेग $\mathbf{v}$ से गमन करती है । तथापि, अगर आपके हाथ की गति समय का ज्यावक्रीय फलन है, तो किसी दिए गए समय पर तरंग की आकृति चित्र 15.3 में दर्शाए अनुसार ज्यावक्रीय होगी। तरंग की आकृति किसी ज्या अथवा कोज्या वक्र की होती है ।

चित्र 15.3 में दर्शायी गई तरंग का दो प्रकार से अध्ययन किया जा सकता है । पहले प्रकार में, जब तरंगरूप डोरी में दाईं ओर गमन करते हैं तब उनका मानीटरन करते हैं, अर्थात् दिए गए समय अंतरालों पर डोरी के 'आशुचित्र' खींचते हैं । विकल्पत: जब तरंग डोरी के अनुदिश आगे बढ़ रही हो तब हम अपना ध्यान

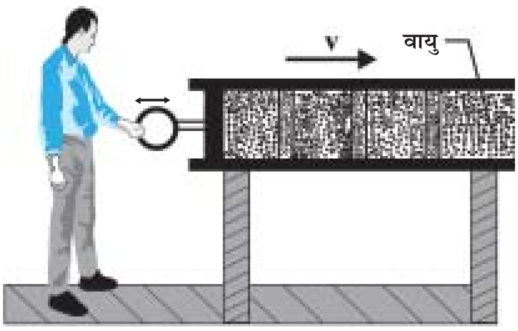


चित्र 15.3 डोरी के अनुदिश एक ज्यावक्रीय तरंग भेजी जाती है । डोरी में जैसे ही तरंग आगे बढ़ती है डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव सतत् रूप से ऊपर-नीचे गति करता है । यह एक अनुप्रस्थ तरंग है ।

इस डोरी के किसी विशेष अवयव की ओर केंद्रित करके उस डोरी-अवयव की गति का मानीटरन ऊपर-नीचे दोलन गति करते समय कर सकते हैं। हम यह पाएँगे कि ऐसे सभी दोलायमान डोरी अवयवों का विस्थापन अनुप्रस्थ अर्थात् तरंग-गति की दिशा के लंबवत् है, जैसा कि चित्र 15.3 में दर्शाया गया है। इस प्रकार की तरंग को **अनुप्रस्थ तरंग** कहते हैं।

अब हम किसी वायु से भरी लंबी नली में पिस्टन की गति द्वारा उत्पन्न ध्वनि तरंगों पर विचार करते हैं (देखिए चित्र 15.4)। यदि आप पिस्टन को यकायक पहले दाएँ और फिर बाएँ गति कराएँ तब आप नली के अनुदिश दाब का एक स्पंद भेजते हैं। पिस्टन की दाईं ओर की गति पिस्टन से अगले वायु-अवयवों को दाईं ओर धकेलती है, जिससे वहाँ का वायु दाब परिवर्तित होता है। इस क्षेत्र में बढ़ा हुआ वायु दाब फिर संलग्न वायु-अवयवों को नली के अनुदिश कुछ दूरी तक दाईं ओर धकेलता है। पिस्टन को बाईं ओर गति कराने पर पिस्टन से संलग्न वायु-अवयवों का दाब घट जाता है। इस घटे हुए वायु दाब के कारण इस वायु-अवयव से अगला वायु-अवयव वापस बाईं ओर गति करता है और फिर उससे संलग्न अगला वायु-अवयव भी बाईं ओर गति करता है। इस प्रकार, वायु की गति तथा वायु दाब में परिवर्तन स्पंद के रूप में नली के अनुदिश दाईं ओर गमन करता है।

यदि आप पिस्टन को निरंतर सरल आवर्त रूप में खींचते और धकेलते रहें, तो नली के अनुदिश एक ज्यावक्रीय तरंग गमन करती है। यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि इस तरंग में



चित्र 15.4 पिस्टन को आगे-पीछे गति कराकर वायु से भरी नली में ध्वनि तरंग उत्पन्न की जाती है। चूँकि वायु-अवयव के दोलन तरंग गति की दिशा के समांतर हैं, अतः यह अनुदैर्ध्य तरंग है।

वायु-अवयव की गति की दिशा तरंग-संचरण की दिशा के समांतर होती है। इस प्रकार की गति को **अनुदैर्ध्य गति** तथा इस प्रकार की तरंग को **अनुदैर्ध्य तरंग** कहते हैं। अतः वायु में उत्पन्न ध्वनि तरंगें अनुदैर्ध्य तरंगें होती हैं।

संक्षेप में, **अनुप्रस्थ तरंगों में माध्यम के अवयव तरंग-संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं तथा अनुदैर्ध्य तरंगों में माध्यम के अवयव तरंग-संचरण के अनुदिश दोलन करते हैं।**

कोई तरंग, चाहे वह अनुप्रस्थ हो अथवा अनुदैर्ध्य **प्रगामी तरंग** कहलाती है, यदि वह माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है। प्रगामी तरंगें अप्रगामी तरंगों से भिन्न होती हैं (देखिए अनुभाग 15.7)। चित्र 15.3 में अनुप्रस्थ तरंगें डोरी के एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करती दर्शायी गयी हैं। जबकि चित्र 15.4 में अनुदैर्ध्य तरंगें नली के एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करती दर्शायी गई हैं। फिर ध्यान दीजिए कि दोनों ही प्रकरणों में केवल तरंग अथवा विक्षोभ ही एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करता है, वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है गति नहीं करता।

अनुप्रस्थ तरंगों में कणों की गति तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होती है। अतः तरंग संचरण के समय माध्यम के प्रत्येक अवयव में अपरूपण विकृति होती है। अतः अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों, जैसे ठोसों एवं डोरियों, में हो सकता है जो अपरूपक प्रतिबलों का परिपालन कर सकें जबकि तरलों में यह संचरण नहीं हो सकता। तरलों के साथ-साथ ठोस भी संपीडन विकृति का प्रतिपालन कर सकते हैं, अतः अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण सभी प्रत्यास्थ माध्यमों में कराया जा सकता है। उदाहरण के लिए, स्टील की छड़ जैसे माध्यमों में अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती हैं, जबकि वायु में केवल अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगों का ही संचरण संभव है। जल के पृष्ठ पर दो प्रकार की तरंगें होती हैं – **केशिकात्वीय** (अथवा पृष्ठ तनावी) **तरंगें** तथा **गुरुत्व तरंगें**। पहले प्रकार की तरंगें काफी कम तरंगदैर्घ्य की उर्मिकाएँ होती हैं जिनकी तरंगदैर्घ्य कुछ सेंटीमीटर से अधिक नहीं होती तथा इनके बनने का कारण जल के पृष्ठ तनाव के कारण प्रत्यानयन बल होता है। गुरुत्व तरंगों की तरंगदैर्घ्य का प्रारूपिक परिसर कई मीटर से कई सौ मीटर तक होता है। ये तरंगें गुरुत्वीय खिंचाव के रूप में लगने वाले प्रत्यानयन बल द्वारा बनती हैं जो जल के पृष्ठ को अपने न्यूनतम स्तर पर रखने का प्रयास करती हैं।

इन तरंगों में कणों के दोलन पृष्ठ तक ही सीमित नहीं रहते बल्कि इनका विस्तार घटते आयाम के साथ तली तक होता है। जल-तरंगों में कण-गति के साथ एक जटिल गति सम्मिलित होती है, वे न केवल ऊपर-नीचे गति करते हैं बल्कि उनकी पश्च तथा अग्र-गति भी होती है। समुद्र में उत्पन्न तरंगें अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों का एक संयोजन होती हैं।

व्यापक रूप में यह पाया गया है कि एक ही माध्यम में अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों की चालें भिन्न-भिन्न होती है।

▶ ***उदाहरण 15.1*** नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्ध्य है अथवा दोनों का संयोजन है :

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

हल

(a) अनुप्रस्थ

(b) अनुदैर्घ्य

(c) अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य

(d) अनुदैर्घ्य ◄

15.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

किसी माध्यम में तरंग गति के संचरण (तथा माध्यम के किसी अवयव की गति) के विवरण के लिए हमें किसी ऐसे फलन की आवश्यकता होती है जो उस तरंग की आकृति का समय के प्रत्येक क्षण पर संपूर्ण विवरण देता हो। उदाहरण के लिए, किसी डोरी पर गमन करती एक तरंग (तथा किसी भी डोरी अवयव की उसकी लंबाई के अनुदिश गति) के संपूर्ण विवरण के लिए हमें एक संबंध की आवश्यकता होती है जो किसी डोरी अवयव के विस्थापन का किसी विशेष स्थिति पर समय के फलन के रूप में विवरण देता हो तथा साथ ही किसी दिए गए क्षण पर डोरी की लंबाई के अनुदिश विभिन्न डोरी अवयवों की कंपन की अवस्था का वर्णन भी करता हो। चित्र 15.3 में दर्शायी गई ज्यावक्रीय तरंग के लिए इस फलन को दिक्स्थान (आकाश) तथा काल दोनों में आवर्ती होना चाहिए। मान लीजिए $y(x, t)$ समय t तथा स्थिति x पर डोरी के किसी अवयव का अनुप्रस्थ विस्थापन है। जब तरंग डोरी के अनुवर्ती अवयवों की ओर बढ़ती जाती है तो वे अवयव y-अक्ष के समांतर दोलन करने लगते हैं। तब हम किसी समय t पर स्थिति x पर अवस्थित अवयव के विस्थापन y को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{15.2}$$

हम यहाँ ज्या (sin) फलन के स्थान पर कोज्या (cos) फलन अथवा ज्या और कोज्या फलनों का रैखिक संयोजन भी चुन सकते हैं, जो इस प्रकार का होता है,

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t) \tag{15.3}$$

तब समीकरण (15.2) में

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{तथा} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

समीकरण (15.2) में निरूपित फलन, स्थिति निर्देशांक x तथा समय t में आवर्ती है। यह x-अक्ष के अनुदिश गतिमान किसी अनुप्रस्थ तरंग को निरूपित करता है। किसी भी समय t पर यह डोरी अवयवों का उनकी स्थितियों के फलन के रूप में विस्थापन देता है। यह हमें किसी दिए गए समय पर तरंग की आकृति बता सकता है तथा यह दर्शा सकता है कि डोरी के अनुदिश तरंग कैसे गति करती है। समीकरण (15.2) में दिए गए विस्थापन फलन x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील प्रगामी तरंग को निरूपित करता है। इसके विपरीत फलन,

$$y(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \phi) \tag{15.4}$$

x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील तरंग को निरूपित करता है। समीकरण 15.2 में चार प्राचलों a, ϕ, k तथा ω का समूह किसी आवर्ती तरंग का संपूर्ण विवरण प्रस्तुत करता है। चित्र 15.5 में इन प्राचलों के नाम दर्शाए गए हैं तथा इनको आगे परिभाषित किया जाएगा।

$$\overbrace{y(x,t)}^{\text{विस्थापन}} = \overbrace{a}^{\text{आयाम}} \sin(\overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{कोणीय}\\ \text{तरंग}\\ \text{संख्या}}}{kx} - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{कोणीय}\\ \text{आवृत्ति}}}{\omega t} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{आरंभिक}\\ \text{कला-कोण}}}{\phi}}^{\text{कला}})$$

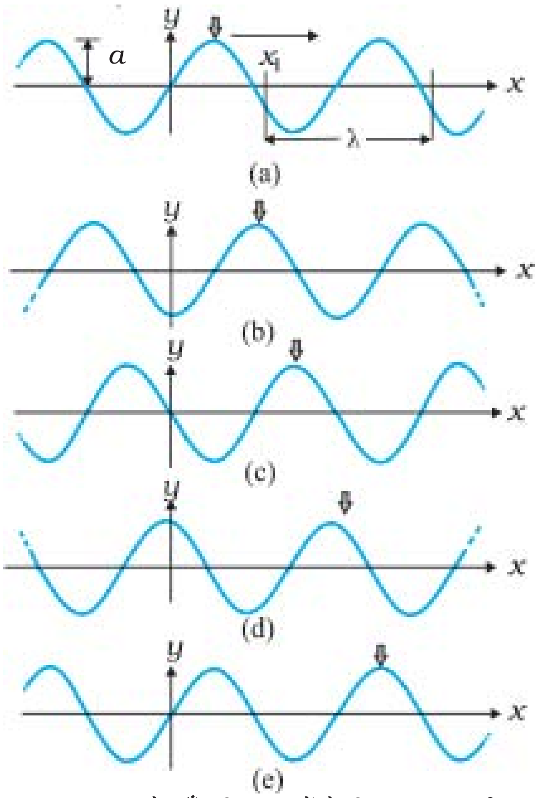
चित्र 15.5 किसी प्रगामी तरंग के लिए समीकरण (15.2) की राशियों के नाम।

समीकरण (15.2) की राशियों की परिभाषाओं को समझने के लिए चित्र 15.5 में दर्शाए गए ग्राफ पर विचार करते हैं। ये ग्राफ x-अक्ष की धनात्मक दिशा में तरंग के गमन करने पर समय के पाँच भिन्न मानों के लिए समीकरण (15.2) के ग्राफों (आलेखों) को निरूपित करते हैं। किसी तरंग में अधिकतम धनात्मक विस्थापन वाले बिंदु, तीर से प्रदर्शित, को **शीर्ष** (crest) कहते हैं तथा अधिकतम ऋणात्मक विस्थापन वाले बिंदु को **गर्त** (trough) कहते हैं। तरंग की प्रगति का संकेतन दाईं ओर गमन करती तरंग के शीर्ष को निर्देशित करते छोटे तीरों की प्रगति द्वारा किया गया है। जब हम एक आरेख से दूसरे की ओर जाते हैं, तो छोटा तीर दाईं ओर तरंग की आकृति सहित गति करता है, परंतु डोरी y-अक्ष के समांतर गति करती है। यह देखा जा सकता है कि जब हम आरेख (a) से (e) पर जाते हैं, तो डोरी का कोई विशेष अवयव परिवर्तनों का एक पूरा चक्र अथवा एक पूरा दोलन कर लेता है। इतनी समय-अवधि में छोटा वाणाग्र अथवा तरंग x-अक्ष के अनुदिश एक अभिलाक्षणिक दूरी चल लेती है।

उपरोक्त पाँच आरेखों के संदर्भ में अब हम समीकरण (15.2) की विभिन्न राशियों जिन्हें चित्र 15.5 में दर्शाया गया है, को परिभाषित करेंगे।

15.3.1 आयाम तथा कला

किसी तरंग का **आयाम** a जैसा कि चित्र 15.5 तथा 15.6 में दर्शाए अनुसार जब वह तरंग किसी माध्यम में आगे बढ़ती है, तब



चित्र 15.6 समय के पाँच भिन्न मानों के लिए x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गतिशील किसी तरंग के लिए समीकरण (15.2) के आलेख ।

माध्यम के अवयवों का साम्यावस्था की स्थितियों से अधिकतम विस्थापन का परिणाम होता है। इसे चित्र 15.6(a) में दर्शाया गया है । चूँकि a_m एक परिमाण है, अत: यदि विस्थापन ऋणात्मक है, तो भी आयाम धनात्मक राशि होती है ।

इस **तरंग की कला,** समीकरण (15.2) के दोलनी पद $\sin(kx - \omega t + \phi)$ का कोणांक $(kx - \omega t + \phi)$ होती है । जब यह तरंग किसी विशिष्ट स्थिति x पर किसी डोरी अवयव में चलकर आगे बढ़ती है, इसकी कला समय t के साथ रैखिकत: परिवर्तित होती है । समय के साथ ज्या (sin) में भी परिवर्तन होता है, इसका मान +1 तथा –1 की सीमाओं में दोलन करता है । इसका चरम धनात्मक मान +1 अवयव से होकर आगे बढ़ती तंरग के शिखर के तदनुरूपी होता है; तब स्थिति x पर विस्थापन y का मान a होता है । इसका चरम ऋणात्मक मान –1 अवयव में होकर आगे बढ़ती तरंग की घाटी के तदनुरूपी होता है । तब स्थिति x पर विस्थापन y का मान $-a$ होता है । इस प्रकार, किसी तरंग के ज्या (sin) फलन तथा कालाश्रित कला, डोरी अवयव के दोलन के तदनुरूपी होते हैं तथा तरंग का आयाम अवयव के विस्थापन के चरमों को निर्धारित करता है । नियतांक ϕ को **आरंभिक कला कोण** अथवा **कला स्थिरांक** कहते हैं । ϕ का मान अवयव (x = 0 तथा t = 0) के आरंभिक विस्थापन तथा आयाम द्वारा निर्धारित होता है ।

मूल बिंदु ($x = 0$) तथा आरंभिक क्षण ($t = 0$) का इस प्रकार चुनाव सदैव ही संभव होता है कि $\phi = 0$ । समीकरण (15.2) का उपयोग $\phi = 0$ लेकर करने से व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता ।

15.3.2 तरंगदैर्घ्य तथा कोणीय तरंग संख्या

किसी तरंग का **तरंगदैर्घ्य** λ उस तरंग की आकृति की दो क्रमिक पुनरावृत्तियों के बीच की दूरी (तरंग-संचरण की दिशा के समांतर) होती है । यह तरंग गति के दो क्रमागत गर्तों अथवा शीर्षों अथवा समान कला वाले दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की न्यूनतम दूरी होती है । चित्र 15.6(a) में समीकरण (15.2) के $t = 0$ तथा $\phi = 0$ के लिए आलेख में एक प्रतिरूपी तरंगदैर्घ्य दर्शायी गई है । इस समय पर समीकरण (15.2) निम्न स्वरूप ले लेता है,

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (15.5)$$

परिभाषा के अनुसार, इस तरंगदैर्घ्य के दोनों सिरों पर विस्थापन y समान होता है, अर्थात् स्थितियों $x = x_1$ तथा $x = x_1 + \lambda$ पर विस्थापन y समान है । इस प्रकार समीकरण (15.2) से,

$$a \sin k x_1 = a \sin k (x_1 + \lambda)$$
$$= a \sin (k x_1 + k\lambda)$$

यह शर्त केवल तभी संतुष्ट हो सकती है जब,

$$k\lambda = 2\pi n$$

जहाँ $n = 1, 2, 3, ...$ । चूँकि λ को समान कला के बिंदुओं के बीच की अल्पतम दूरी द्वारा परिभाषित किया जाता है, अत: $n = 1$ लेने पर

$$k = 2\pi/\lambda \qquad (15.6)$$

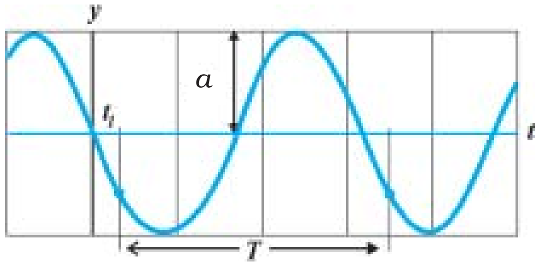
k को **संचरण स्थिरांक** अथवा **कोणीय तरंग संख्या** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति मीटर अथवा rad m^{-1} है।*

ध्यान देने योग्य बात यह है कि चित्र 15.6 में जब हम एक आरेख से दूसरे आरेख पर जाते हैं, तो तरंग दाईं ओर 1/4 λ के बराबर दूरी आगे बढ़ जाती है । इस प्रकार, आगे बढ़ते हुए जब हम पाँचवें आरेख पर पहुँचते हैं तो तरंग λ के बराबर दूरी दाईं ओर चलकर आगे बढ़ जाती है ।

15.3.3 आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति तथा आवृत्ति

चित्र 15.7 में, समीकरण (15.2) के विस्थापन y का समय t के सापेक्ष डोरी के अनुदिश किसी निश्चित स्थिति, जिसे x=0

*यहाँ भी rad को छोड़ सकते हैं और मात्रक को केवल m^{-1} से व्यक्त कर सकते हैं। अत:, k, इकाई लंबाई में समा सकने वाली तरंगों की संख्या का 2π से गुणा करने पर प्राप्त होने वाली m^{-1} SI मात्रक में मापी जाने वाली राशि है।



चित्र 15.7 जब चित्र 15.6 की ज्यावक्रीय तरंग डोरी में से गुजरती है, तब $x = 0$ पर डोरी-अवयव के विस्थापन का समय के फलन के रूप में आलेख । इस आलेख में विस्थापन a दर्शाया गया है । किसी स्वेच्छ समय t_1 से मापा गया प्रतिरूपी आवर्तकाल भी दर्शाया गया है ।

लिया है, का आलेख दर्शाया गया है । यदि आप डोरी को मानीटर करें, तो आप यह पाएँगे कि उस स्थिति (x=0) पर विद्यमान डोरी का अवयव समीकरण (15.2) में दिए अनुसार ही ऊपर-नीचे सरल आवर्त गति करता है,

$$y(0,t) = a \sin(-\omega t)$$
$$= -a \sin \omega t$$

चित्र 15.7 इसी समीकरण का आरेख है । यह तरंग की आकृति नहीं दर्शाता ।

किसी डोरी से गुजरने वाली तरंग के **आवर्तकाल** T को उस डोरी के किसी भी अवयव द्वारा एक दोलन पूरा करने में लिए गए समय के रूप में परिभाषित किया जाता है । चित्र 15.7 में एक प्रतिरूपी आवर्तकाल भी अंकित किया गया है । समीकरण (15.2) का प्रयोग इस समय-अंतराल के दोनों सिरों पर करने पर

$$-a \sin \omega t_1 = -a \sin \omega(t_1 + T)$$
$$= -a \sin(\omega t_1 + \omega T)$$

यह केवल तभी सही हो सकता है, यदि ωT का अल्पतम मान 2π हो, अथवा यदि

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{15.7}$$

ω को तरंग की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड अथवा rad s^{-1} है ।

चित्र 15.6 में दर्शाए गए प्रगामी तरंग के पाँचों आरेखों पर पुनः दृष्टि डालिए । दो क्रमागत आरेखों के बीच समय अंतराल $T/4$ है । इस प्रकार, पाँचवें आरेख तक प्रत्येक डोरी-अवयव एक संपूर्ण दोलन कर लेता है ।

किसी तरंग की **आवृत्ति** अथवा ν को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति एवं कोणीय आवृत्ति ω में निम्नलिखित संबंध होता है,

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{15.8}$$

जब कोई तरंग किसी डोरी से गुजरती है तो इस डोरी के किसी अवयव द्वारा एकांक समय में पूरे किए गए दोलनों की संख्या को तरंग की आवृत्ति कहते हैं । इसे प्रायः हर्ट्ज़ में मापते हैं, जिसका प्रतीक Hz है ।

उपर्युक्त चर्चा में सदैव ही किसी डोरी के अनुदिश गतिशील तरंग अथवा अनुप्रस्थ तरंग का संदर्भ लिया गया है । अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के किसी अवयव में तरंग संचरण की दिशा के समांतर विस्थापन होता है । समीकरण (15.2) में किसी अनुदैर्घ्य तरंग के लिए विस्थापन फलन इस प्रकार लिखा जाता है,

$$s(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{15.9}$$

यहाँ $s(x, t)$ स्थिति x तथा समय t पर माध्यम के किसी अवयव का तरंग संचरण की दिशा में विस्थापन है । समीकरण (15.9) में a_m विस्थापन आयाम है। अन्य सभी राशियों के वही अर्थ हैं जो अनुप्रस्थ तरंग के प्रकरण में थे । केवल एक ही अंतर है कि विस्थापन फलन $y(x, t)$ के स्थान पर फलन $s(x, t)$ लिया गया है।

उदाहरण 15.2 : किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है,

$$y(x, t) = 0.005 \sin(80.0\, x - 3.0\, t)$$

यहाँ आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 m, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्घ्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए। दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर तरंग का विस्थापन y भी परिकलित कीजिए ।

हल इस विस्थापन की तुलना समीकरण (15.2) से करने पर

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं,

(a) तरंग का आयाम = 0.005 m = 5 mm

(b) कोणीय तरंग संख्या = 80.0 m^{-1} तथा कोणीय आवृत्ति $\omega = 30\ s^{-1}$

अब हम समीकरण (15.6) के द्वारा तरंगदैर्घ्य λ तथा k में संबंध लिखते हैं

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$
$$= \frac{2\pi}{80.0\ m^{-1}}$$
$$= 7.85\ cm$$

(c) अब हम नीचे दिए गए T तथा ω में संबंध द्वारा T का मान ज्ञात करते हैं,

$$T = 2\pi/\omega$$
$$= \frac{2\pi}{3.0\ s^{-1}}$$
$$= 2.09\ s$$

अब चूँकि आवृत्ति $\nu = 1/T$

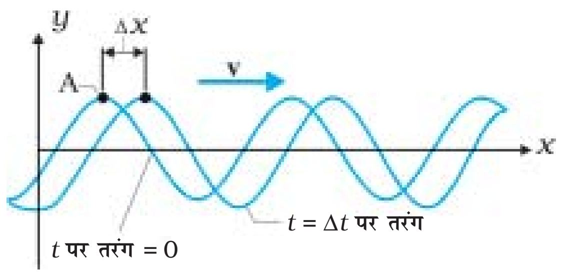
$$= 0.48\ Hz$$

दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर विस्थापन

$$y = 0.005\text{m} \sin(80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$$
$$= 0.005\text{m} \sin(-36 + 12\pi) = (0.005 \text{ m}) \sin(1.699)$$
$$= (0.005 \text{ m}) \sin(97) \simeq 5 \text{ mm}$$

15.4 प्रगामी तरंग की चाल

आइए, अब हम समीकरण (15.2) द्वारा निरूपित किसी डोरी के अनुदिश गमन करती प्रगामी तरंग के संचरण को मानीटर करें। यह तरंग x की धनात्मक दिशा में गमन करती है। हम यह पाते हैं कि एक विशिष्ट स्थिति x पर कोई डोरी अवयव समय के फलन के रूप में ऊपर-नीचे गति करता है, परंतु निर्दिष्ट तरंग रूप दाईं ओर आगे बढ़ रहा है। चित्र 15.8 में दो विभिन्न समयों, जिनके बीच Δt का लघु समय अंतराल है, पर विभिन्न डोरी अवयवों के विस्थापनों की अवस्थाएँ (कला कोण ϕ को शून्य मानकर) दर्शाई गई हैं। ध्यान से देखने पर यह पाया जाता है कि इस लघु समय अंतराल Δt में समस्त तरंग पैटर्न धनात्मक दिशा में Δx दूरी चलता है। इस प्रकार तरंग x की धनात्मक दिशा में दाईं ओर गमन करती है। अनुपात $\Delta x/\Delta t$ को 'तरंग-चाल' v कहते हैं।



चित्र 15.8 समीकरण (15.2) के दो क्षणों पर, जिनके बीच लघु समय अंतराल Δt है, आरेख – पहला $t=0$ पर तथा दूसरा $t=\Delta t$ पर। जब तरंग दाईं ओर वेग $\mathbf{v}$ *से गमन करती है, तब समय अंतराल Δt में समस्त वक्र Δx पर स्थानांतरित हो जाता है। बिंदु A तरंग रूप पर सवार रहता है परंतु डोरी अवयव केवल ऊपर-नीचे गति करता है।*

जब तरंग गमन करती है, तब उस गतिशील तरंग रूप का प्रत्येक बिंदु अपने विस्थापन y को सुरक्षित रखते हुए तरंग की विशिष्ट कला को निरूपित करता है (देखिए चित्र 15.8)। ध्यान देने योग्य बात यह है कि डोरी के बिंदु अपने विस्थापनों को सुरक्षित नहीं रखते, जबकि तरंग रूप के बिंदु ऐसा करते हैं। आइए, अब हम किसी बिंदु, जैसे तरंग रूप के शिखर पर अंकित बिंदु A पर विचार करते हैं। यदि तरंग की गति के समय तरंग रूप के बिंदु A की भाँति कोई अन्य बिंदु अपने विस्थापन को सुरक्षित रखता है, तब समीकरण (15.2) के अनुसार यह तभी संभव हो सकता है जब कोणांक अचर हो। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि,

$$kx - \omega t = \text{नियतांक} \qquad (15.10)$$

ध्यान दीजिए, कोणांक $(kx - \omega t)$ में x तथा t दोनों में परिवर्तन होता है। अतः कोणांक का मान नियत रखने के लिए यदि t बढ़ता है तो x भी बढ़ना चाहिए। यह केवल तभी संभव है जब तरंग x की धनात्मक दिशा में गति करे।

तरंग-चाल ज्ञात करने के लिए आइए समीकरण (15.10) को समय के सापेक्ष अवकलित करें, तब

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}(kx - \omega t) = 0$$

अथवा,
$$k\frac{\text{d}x}{\text{d}t} - \omega = 0$$

अथवा,
$$\frac{\text{d}x}{\text{d}t} = \frac{\omega}{k} = v \qquad (15.11)$$

समीकरणों (15.6)-(15.8) का उपयोग करके, हम लिख सकते हैं कि

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \qquad (15.12)$$

समीकरण (15.11) एक व्यापक संबंध है, जो सभी प्रगामी तरंगों के लिए वैध है। यह समीकरण केवल यह बताती है कि तरंग एक दोलनकाल में एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी तय करती है। किसी तरंग की चाल, समीकरण (15.12) द्वारा, उस तरंग की तरंगदैर्घ्य तथा आवृत्ति से संबंधित होती है, परंतु इसका निर्धारण, जिस माध्यम से तरंग गमन करती है उस माध्यम के गुणों द्वारा होता है। यदि किसी तरंग को किसी माध्यम जैसे वायु, जल, स्टील अथवा तानित डोरी में गमन करना है, तो माध्यम में तरंग के गमन करते समय तरंग को उस माध्यम के कणों में दोलन उत्पन्न करने चाहिए। ऐसा तभी हो सकता है जब माध्यम में द्रव्यमान तथा प्रत्यास्थता हो। इसीलिए, तानित डोरियों जैसे रैखिक निकायों के प्रकरणों में घनत्व अथवा डोरी की प्रति एकांक लंबाई की द्रव्यमान तथा माध्यम के प्रत्यास्थ गुण यह निर्धारित करते हैं कि तरंगें उस माध्यम में कितनी तीव्रता से गति कर सकती हैं। विलोमतः, इन गुणों के प्रयोग से तरंग की चाल परिकलित करना संभव होना चाहिए। इस अध्याय के अनुवर्ती उपभागों में कुछ माध्यमों में यांत्रिक तरंगों की चाल के लिए हम विशिष्ट व्यंजक प्राप्त करेंगे।

15.4.1 तानित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल

किसी डोरी पर गमन करती किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल का निर्धारण दो कारकों द्वारा होता है : (i) रैखिक द्रव्यमान घनत्व अथवा डोरी की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान μ, तथा

(ii) तनाव T । द्रव्यमान की आवश्यकता का कारण यह है कि इन तरंगों में यांत्रिक ऊर्जा होती है तथा बिना तनाव के डोरी में विक्षोभ का संचरण संभव नहीं होता । किसी तानित डोरी में उत्पन्न अनुप्रस्थ तरंगों की चाल तथा ऊपर वर्णित दो प्राचलों (μ तथा T) में यथार्थ संबंध व्युत्पन्न करना इस पुस्तक के विषय-क्षेत्र से बाहर है । फिर भी हम इस संबंध को व्युत्पन्न करने की एक सरल विधि अपनाते हैं। विमीय विश्लेषण के अध्ययन (अध्याय 2) में हम परस्पर संबंधित भौतिक राशियों के बीच संबंध स्थापित करने की विधि सीख चुके हैं । फिर भी इस विधि द्वारा प्राप्त संबंध में स्थिरांक संबंधी अनिश्चितता रहती है ।

किसी डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ उस डोरी का द्रव्यमान m को डोरी की लंबाई l से विभाजित करने पर प्राप्त होता है, अत: रैखिक द्रव्यमान घनत्व की विमा $[ML^{-1}]$ है । तनाव T तथा बल की एक ही विमा होती है, अत: तनाव की विमा $[MLT^{-2}]$ है । हमारा उद्देश्य μ तथा T को इस प्रकार संयोजित करना है कि इन दोनों के संयोजन से चाल υ की विमा $[LT^{-1}]$ उत्पन्न हो जाए । यदि हम इन राशियों की विमाओं को ध्यान से देखें, तो हम यह आसानी से देख सकते हैं कि अनुपात T/μ की विमा

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

है। अत:, यदि तरंग की चाल υ, T तथा μ पर निर्भर करती है, तो इनमें यह संबंध होना चाहिए,

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.13)$$

यहाँ C विमाहीन स्थिरांक है, जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है । और अधिक परिशुद्ध प्रक्रिया द्वारा यह दर्शाया जा सकता है कि C का वास्तविक मान 1 है । अत: तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.14)$$

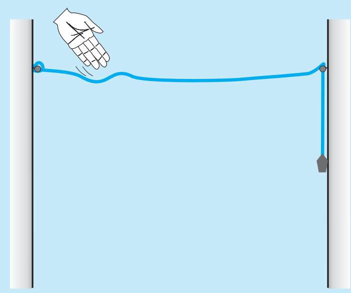
समीकरण (15.14) से हमें यह ज्ञात होता है, कि

किसी अनुप्रस्थ तरंग की किसी आदर्श तानित डोरी के अनुदिश चाल केवल उस डोरी में तनाव तथा डोरी के रैखिक द्रव्यमान घनत्व पर निर्भर करती है तथा यह तरंग की आवृत्ति पर निर्भर नहीं करती ।

तरंग की आवृत्ति का निर्धारण, उस तरंग को उत्पन्न करने वाले स्रोत द्वारा होता है । तब तरंग के **तरंगदैर्घ्य** का निर्धारण समीकरण (15.12) द्वारा निम्नलिखित रूप में होता है ।

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \qquad (15.15)$$

किसी रस्सी पर स्पंद का संचरण



किसी रस्सी पर एक स्पंद का संचरण आप आसानी से देख सकते हैं। आप एक दृढ़ परिसीमा से इस स्पंद का परिवर्तन होना भी देख सकते हैं और इसके गमन वेग की गणना भी कर सकते हैं। इसके लिए आपको 1 से 3 cm व्यास के एक रस्से, दो हुकों और कुछ भारों की आवश्यकता होगी। आप यह प्रयोग अपनी कक्षा में भी कर सकते हैं और प्रयोगशाला में भी।

1 से 3 cm व्यास की लंबी रस्सी लीजिए। किसी सभागार या प्रयोगशाला के आमने-सामने की दीवारों पर दो हुक लगाकर इसका एक सिरा एक हुक से कस कर बाँध दीजिए और दूसरे सिरे को सामने वाले हुक से गुजार कर इस पर कोई भार (1 से 5kg) लटकाइये। दीवारों के बीच की दूरी 3 से 5 मीटर हो सकती है। एक छड़ लीजिए और रस्सी के एक सिरे के पास इस पर ज़ोर से प्रहार कीजिए। इससे रस्सी पर एक स्पंद बनेगा जो फिर इस पर दूसरे सिरे तक जाएगा। आप इसे दूसरे सिरे तक जाकर परावर्तित होता हुआ देख सकते हैं। आप आपाती स्पंद और परावर्तित स्पंद की कलाओं का संबंध भी जाँच सकते हैं। स्पंद के समाप्त होने से पहले आप इसके दो-तीन परावर्तन होते देख सकते हैं। एक स्टॉपवाच (विराम घड़ी) की सहायता से आप स्पंद द्वारा एक दीवार से दूसरी दीवार की दूरी तक चलने में लगा समय ज्ञात कर सकते हैं और फिर इसके वेग की गणना कर सकते हैं। इसकी तुलना समीकरण (15.14) द्वारा प्राप्त मान से कीजिए।

ऐसा ही किसी संगीत वाद्य के पतले धात्विक तंतु के मामले में भी होता है। मुख्य अंतर बस यह है कि तंतु का प्रति इकाई द्रव्यमान कम होने के कारण इस पर स्पंद का वेग मोटी रस्सी पर इसके वेग की तुलना में काफी अधिक होता है। रस्सी पर स्पंद का वेग कम होने के कारण इसे देखा जा सकता है और इसलिए मापन सुविधाजनक और सटीक हो जाता है।

▶ ***उदाहरण 15.3 :*** 0.72 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 5.0 10^{-3}kg है । यदि तार पर तनाव 60 N है, तो तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है ?

हल : तार की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान

$$\mu = \frac{5.0 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\,\text{m}}$$

$$= 6.9\ 10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$$

तनाव, $T = 60$ N

तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \text{N}}{6.9 \times 10^{-3}\,\text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

15.4.2 अनुदैर्घ्य तरंग की चाल - ध्वनि की चाल

किसी अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के अवयव तरंग संचरण की दिशा में अपनी स्थिति के आगे-पीछे दोलन करते हैं । हम पहले भी देख चुके हैं कि ध्वनि तरंगें वायु के लघु आयतन-अवयवों के संपीडनों तथा विरलनों के रूप में गमन करती हैं । दाब में परिवर्तन के कारण माध्यम के किसी अवयव के आयतन में होने वाले परिवर्तन का निर्धारण उस माध्यम के एक विशेष गुण द्वारा होता है । माध्यम के इस गुण को **आयतन प्रत्यास्थता गुणांक**, B कहते हैं जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं, (अध्याय 9 देखिए)

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad (15.16)$$

यहाँ $\Delta V/V$ आयतन में उत्पन्न भिन्नात्मक परिवर्तन है जो दाब में परिवर्तन ΔP के कारण होता है । दाब का SI मात्रक N m^{-2} अथवा पास्कल (प्रतीक Pa) हैं। अब चूँकि किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों का संचरण, संपीडन तथा विरलन अथवा घनत्व में परिवर्तन के रूप में होता है, अत: तरंगों के संचरण की प्रक्रिया में माध्यम के जिस जड़त्वीय गुण को सम्मिलित किया जा सकता है वह माध्यम का घनत्व ρ ही है । घनत्व की विमा [ML^{-3}] है । इस प्रकार, अनुपात B/ρ की विमा

$$\frac{[\text{M L}^{-1}\,\text{T}^{-2}]}{[\text{M L}^{-3}]} = [\text{L}^2\,\text{T}^{-2}], \qquad (15.17)$$

अत:, विमीय विश्लेषण के आधार पर, किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल के लिए प्राप्त सर्वाधिक उपयुक्त व्यंजक को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$v = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.18)$$

यहाँ C एक विमाहीन स्थिरांक है तथा यह दर्शाया जा सकता है कि इसका मान 1 है । इस प्रकार किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है ।

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.19)$$

अत:, किसी तरल में अनुदैर्घ्य तरंगों के संचरण की चाल केवल उस तरल के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा घनत्व पर निर्भर करती है ।

जब किसी ठोस छड़ के एक सिरे पर कोई आघात करते हैं, तब स्थिति किसी अचर अनुप्रस्थ काट के सिलिंडर (अथवा नली) में भरे तरल से कुछ भिन्न होती है । इस प्रकरण के लिए, प्रासंगिक प्रत्यास्थता गुणांक 'यंग प्रत्यास्थता गुणांक' Y है । इसका कारण यह है कि छड़ की अनुप्रस्थ काट में प्रसार नगण्य होता है तथा केवल अनुदैर्घ्य विकृति पर ही विचार करने की आवश्यकता होती है । यह प्रमाणित किया जा सकता है कि छड़ में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है,

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (15.20)$$

यहाँ Y छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है ।

सारणी 15.1 में विभिन्न माध्यमों में ध्वनि की चाल दर्शायी गई हैं ।

सारणी 15.1 कुछ माध्यमों में ध्वनि की चाल

माध्यम	चाल (m s^{-1})
गैसें	
वायु (0 C)	331
वायु (20 C)	343
हीलियम	965
हाइड्रोजन	1284
द्रव	
जल (0 C)	1402
जल (20 C)	1482
समुद्र-जल	1522
ठोस	
ऐलुमिनियम	6420
कॉपर (ताँबा)	3560
स्टील	5941
ग्रेनाइट	6000
वल्केनाइज्ड रबर	54

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि यद्यपि ठोसों तथा द्रवों के घनत्व गैसों के घनत्व की तुलना में कहीं अधिक हैं, तथापि ठोसों तथा द्रवों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक है । इसका कारण यह है कि ठोसों व द्रवों में गैसों की तुलना में कम संपीडन होता है, अर्थात् ठोसों तथा द्रवों का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक गैसों की तुलना में बहुत अधिक होता है ।

किसी आदर्श गैस के प्रकरण में, दाब P तथा आयतन V के बीच संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है (देखिए अध्याय 11),

$$PV = Nk_BT \qquad (15.21)$$

यहाँ N गैस में अणुओं की संख्या, k_B बोल्ट्ज़मान नियतांक तथा T गैस का केल्विन में ताप है । अतः किसी समतापी परिवर्तन के लिए समीकरण (15.21) द्वारा हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

अथवा $-\dfrac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$

अतः समीकरण (15.16) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$B = P$$

अतः किसी आदर्श गैस में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (15.22)$$

इस संबंध को सर्वप्रथम न्यूटन ने स्थापित किया था, अतः इसे न्यूटन का सूत्र भी कहते हैं ।

▶ ***उदाहरण 15.4*** न्यूटन के सूत्र का उपयोग करके मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए । वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0 10^{-3} kg है ।

हल : हम जानते हैं कि किसी भी गैस के 1 मोल का STP पर आयतन 22.4 लीटर होता है । अतः वायु का STP पर घनत्व

$$\rho_0 = \frac{\text{1 मोल वायु का द्रव्यमान}}{\text{STP पर 1 मोल वायु का आयतन}}$$

$$= \frac{29.0 \quad 10^{-3}\,\text{kg}}{22.4 \quad 10^{-3}\,\text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

किसी माध्यम में ध्वनि की चाल के लिए न्यूटन के सूत्र के अनुसार हमें STP पर वायु में ध्वनि के वेग का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है,

$$\upsilon = \left[\frac{1.01\times10^5\ \text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \qquad (15.23)$$ ◀

समीकरण (15.23) में प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल का मान, सारणी 15.1 में दिए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल के मान 331 m s^{-1} की तुलना में लगभग 15% कम है। आखिर हमसे कहाँ गलती हुई ? यदि हम न्यूटन की इस मूल कल्पना का परीक्षण करें जिसमें न्यूटन ने ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब में होने वाले परिवर्तन को समतापी माना, तो हम यह पाते हैं कि उनकी यह कल्पना सही नहीं थी । लाप्लास ने यह बताया कि ध्वनि संचरण के समय संपीडनों एवं विरलनों के कारण माध्यम में दाब-परिवर्तन इतनी तीव्र गति से होते हैं कि ऊष्मा प्रवाह के लिए ताप को स्थायी बनाए रखने का आवश्यक समय उपलब्ध नहीं हो पाता । फलस्वरूप ताप नियत नहीं रह पाता जिसके कारण दाब-परिवर्तन समतापी नहीं होते वरन् रुद्धोष्म (adiabatic) होते हैं । रुद्धोष्म प्रक्रियाओं (adiabatic processes) के लिए आदर्श गैसों पर निम्न संबंध लागू होता है

$$PV^{\gamma} = \text{स्थिरांक}$$

अर्थात् $\Delta\,(PV^{\gamma}) = 0$

$$P\gamma V^{\gamma-1}\,\Delta V + V^{\gamma}\,\Delta P = 0$$

इस प्रकार, आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

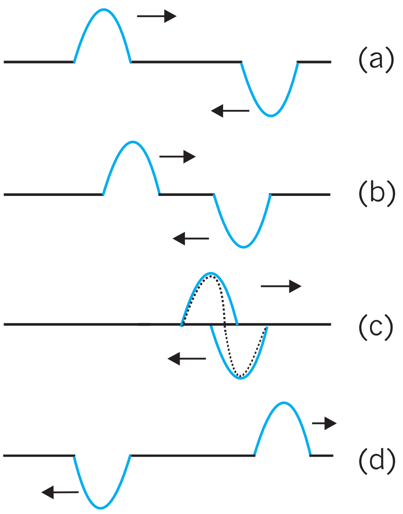
यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात, अर्थात् C_p/C_v है । अतः वायु में ध्वनि की चाल,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (15.24)$$

न्यूटन के सूत्र में लाप्लास द्वारा की गई इस संशुद्धि को **लाप्लास संशोधन** कहते हैं । वायु के लिए $\gamma = 7/5$, अतः अब यदि हम STP पर वायु में ध्वनि की चाल के आकलन के लिए समीकरण (15.24) का प्रयोग करें तो हमें वायु में STP पर ध्वनि की चाल का मान 331.3 m s^{-1} प्राप्त होता है, जो मापित चाल से मेल खाता है ।

15.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

माना कि एक ही क्षण में तानित डोरी पर दो तरंगें विपरीत दिशाओं में गमन कर रही हैं। चित्र 15.9 में विभिन्न समयों पर भिन्न-भिन्न डोरी अवयवों के विस्थापनों की अवस्था को क्रमवार चित्रित करके दर्शाया गया है । प्रत्येक चित्र में किसी दिए गए क्षण पर डोरी में परिणामी तरंग रूप दर्शाया गया है ।



चित्र 15.9 *किसी तानित डोरी के अनुदिश विपरीत दिशाओं में गमन करते दो स्पंदों के चित्रों का अनुक्रमित चित्रण । ये स्पंद (a) से (d) में दर्शाए गए समय-आशुचित्रों के अनुक्रम द्वारा परस्पर मिलते हैं, एक दूसरे को पार करते हैं तथा स्वतंत्रतापूर्वक आगे बढ़ जाते हैं । कुल विक्षोभ प्रत्येक स्पंद के कारण विस्थापनों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है । जब दो विक्षोभ मिलते हैं, तब वे चित्र (c) में दर्शाए अनुसार एक पैटर्न की सृष्टि करते हैं । चित्र (d) में वे एक दूसरे को पार करके अपनी आकृति में बिना किसी परिवर्तन के आगे बढ़ते हैं ।*

यह पाया गया है कि ***किसी दिए गए समय पर किसी डोरी अवयव का नेट विस्थापन प्रत्येक तरंग के कारण उस डोरी अवयव में विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है ।*** नेट विस्थापन निर्धारित करने के लिए पृथक्-पृथक् तरंग रूपों को इस प्रकार जोड़ना **अध्यारोपण का सिद्धांत** कहलाता है । इस नियम को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ किसी भी डोरी अवयव के ऐसे विस्थापन हैं, जो यदि तरंगें अलग-अलग डोरी से गमन करतीं तो उस अवयव के होते । यदि दो तरंगें किसी डोरी अवयव पर अतिव्यापित होती हैं तो उस डोरी अवयव का अतिव्यापन के समय विस्थापन $y(x, t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (15.25)$$

तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत को इस प्रकथन द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है कि ***अतिव्यापित तरंगें बीजगणितीय रूप से जुड़कर परिणामी तरंग (अथवा नेट तरंग) उत्पन्न करती हैं।*** इस सिद्धांत में यह तथ्य अंतर्निहित है कि तरंगों का अतिव्यापन किसी भी तरह से एक दूसरे के गमन को परिवर्तित नहीं करता ।

यदि किसी माध्यम से एक ही क्षण दो अथवा अधिक तरंगें गमन कर रहीं हैं तो उनका परिणामी तरंग रूप दोनों तरंगों के पृथक्-पृथक् तरंग फलनों का योग होता है । अर्थात् यदि गतिशील तरंगों के तरंग फलन इस प्रकार हैं,

$$y_1 = f_1(x - vt),$$
$$y_2 = f_2(x - vt),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = f_n(x - vt),$$

तब माध्यम में विक्षोभ का वर्णन करने वाला तंरग फलन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x - vt) + \dots\dots\dots + f_n(x - vt)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - vt) \qquad (15.26)$$

इस सिद्धांत की व्याख्या के रूप में अब हम व्यतिकरण की परिघटना तथा तरंगों के परावर्तन का अध्ययन करेंगे ।

मान लीजिए किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करने वाली किसी एक तरंग को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \qquad (15.27)$$

तथा एक दूसरी तरंग जो पहली तरंग से कलान्तर ϕ पर स्थानांतरित है, को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$y_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.28)$$

इन दोनों तरंगों की कोणीय आवृत्तियाँ समान हैं, कोणीय तरंग संख्या k समान हैं (अर्थात् समान तरंगदैर्घ्य हैं), तथा समान आयाम a हैं । ये दोनों तरंगें ही x-अक्ष की धनात्मक दिशा में समान चाल से गमन करती हैं । किसी दिए गए समय तथा दूरी पर उनकी कलाओं में एक नियत कोण ϕ का अंतर है। इन तरंगों में एक की कला दूसरी से ϕ कम या ज्यादा है अथवा ऐसा भी कहा जाता है कि दोनों में ϕ कलांतर है ।

अब अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रयोग करने पर, परिणामी तरंग दोनों तरंगों का बीजगणितीय योग होती है जिसका विस्थापन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.29)$$

त्रिकोणमिति द्वारा हम यह जानते हैं कि

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \qquad (15.30)$$

इस संबंध का प्रयोग समीकरण (15.29) में करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$y(x,t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (15.31)$$

समीकरण (15.31) यह दर्शाती है कि परिणामी तरंग भी, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करने वाली एक ज्यावक्रीय तरंग होती है ।

यह परिणामी तरंग व्यतिकारी तरंगों से दो बातों में भिन्न होती है : (1) इसका कलांतर $\phi/2$ है तथा (2) इसका आयाम एक राशि है जिसे समीकरण (15.31) में गुरु कोष्ठक [ ] में दिखाया गया है, अर्थात्,

$$A(\phi) = 2a\cos\frac{1}{2}\phi \qquad (15.32)$$

यदि $\phi = 0$, अर्थात् दोनों तरंगें समान कला में हैं, तब समीकरण (15.31) के अनुसार

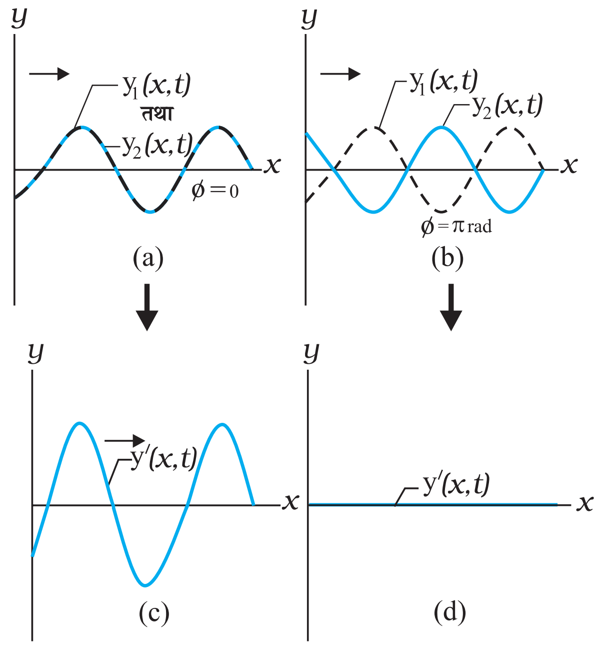
$$A(0) = 2\,a\sin(kx - \omega t) \qquad (15.33)$$

परिणामी तरंग का आयाम $2a_m$ है, जो $A(\phi)$ के संभावित आयामों में अधिकतम है।

यदि $\phi = \pi$ (180) है, तो दोनों तरंगें पूर्णतः एक दूसरे से विपरीत कलाओं में होती हैं, तथा समीकरण (15.32) में दिए अनुसार परिणामी तरंग का आयाम शून्य होता है । तब हमें x तथा t के सभी मानों के लिए परिणामी तरंग का विस्थापन शून्य प्राप्त होता है,

$$y\,(x, t) = 0 \qquad (15.34)$$

चित्र 15.10 में इनको दर्शाया गया है।



चित्र 15.10 किसी तानित डोरी के अनुदिश x-अक्ष की धनात्मक दिशा में दो सर्वसम ज्यावक्रीय तरंगें, $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ गमन करती हैं । ये दोनों तरंगें परिणामी तरंग, $y^1(x, t)$ देती हैं, दोनों तरंगों के बीच कलांतर (a) 0 तथा (b) π अथवा 180 है । (c) तथा (d) में तदनुरूपी परिणामी तरंगें दर्शायी गई हैं ।

15.6 तरंगों का परावर्तन

पिछले अनुभागों में हमने अपरिबद्ध माध्यमों में तरंग संचरण की चर्चा की । क्या होता है जब कोई स्पंद अथवा प्रगामी तरंग किसी दृढ़ परिसीमा का सामना करती है ? यह हमारा सामान्य अनुभव है कि ऐसी स्थिति में स्पंद अथवा तरंग परावर्तित हो जाती है । किसी दृढ़ परिसीमा से ध्वनि तरंगों का टकराना तथा टकराने के पश्चात् परावर्तित ध्वनि सुनाई देना, अर्थात् प्रतिध्वनि की परिघटना तरंगों के परावर्तन का एक दैनिक जीवन का उदाहरण है । यदि परिसीमा पूर्णतः दृढ़ नहीं है अथवा वह किन्ही दो भिन्न प्रत्यास्थ माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ है, तो आपतित स्पंदों अथवा तरंगों पर परिसीमा-शर्तों का प्रभाव कुछ जटिल हो जाता है । इस स्थिति में आपतित तरंग का कुछ भाग परावर्तित हो जाता है तथा कुछ भाग दूसरे माध्यम में पारगमित हो जाता है । यदि कोई तरंग दो भिन्न माध्यमों की परिसीमा पर तिरछी आपतित होती है तो पारगमित तरंग को **अपवर्तित तरंग** कहते हैं। आपतित एवं अपवर्तित तरंगें स्नेल के अपवर्तन के नियमों का पालन करती हैं, तथा आपतित एवं परावर्तित तरंगें परावर्तन के सामान्य नियमों का पालन करती हैं ।

परिसीमा पर तरंगों के परावर्तन की व्याख्या करने के लिए हम दो स्थितियों पर विचार करते हैं । पहला, जिसमें डोरी का बायाँ सिरा चित्र 15.11(a) में दर्शाए अनुसार एक दृढ़ दीवार से जुड़ा है । दूसरा, जिसमें डोरी के बाएँ सिरे को किसी ऐसे छल्ले से बाँधा गया है, जो चित्र 15.11(b) में दर्शाए अनुसार किसी छड़ पर ऊपर-नीचे बिना किसी घर्षण के सरक सकता है । इन दोनों ही डोरियों में जब कोई स्पंद संचरित किया जाता है तब यह स्पंद डोरी के बाएँ सिरे पर पहुँचकर परावर्तित हो जाता है । डोरी में विभिन्न समयों पर होने वाले विक्षोभ की अवस्थाओं को चित्र 15.11 में दर्शाया गया है ।

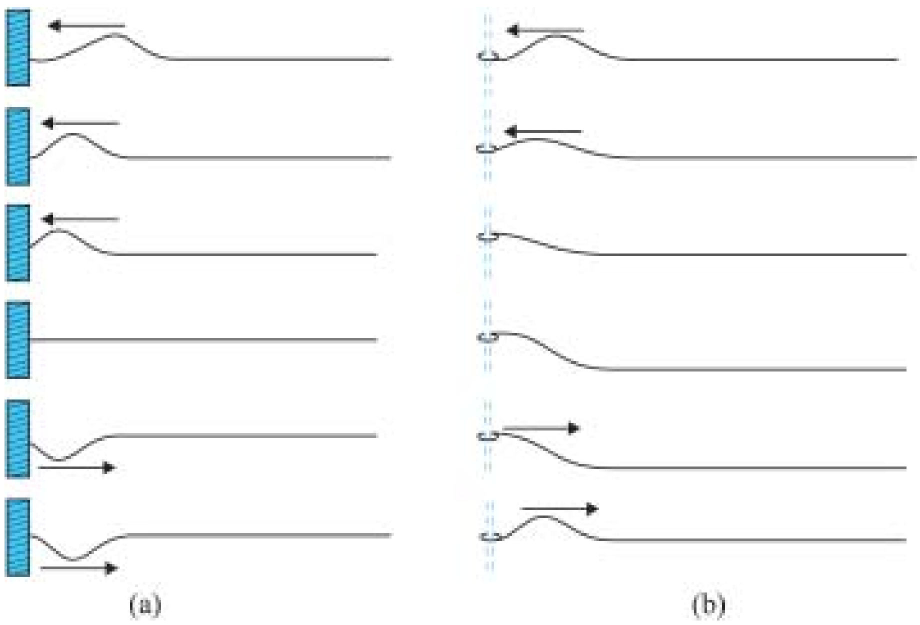
चित्र 15.11(a) में डोरी का बायाँ सिरा दीवार से जुड़ा है । जब स्पंद इस सिरे पर पहुँचता है, तो वह दीवार पर ऊपर की दिशा में बल आरोपित करता है । न्यूटन के तीसरे नियम के अनुसार, दीवार डोरी पर परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत बल आरोपित करती है । यह दूसरा बल टेक (दीवार) पर स्पंद उत्पन्न करता है जो वापस डोरी के अनुदिश आपतित स्पंद की विपरीत दिशा में गमन करता है । इस प्रकार के परावर्तन में, चूँकि डोरी टेक से जुड़ी है, इसलिए टेक पर कोई विस्थापन नहीं होना चाहिए । परावर्तित तथा आपतित स्पंदों के चिह्न विपरीत होने चाहिए ताकि टेक पर ये एक दूसरे को निरस्त कर सकें । इस प्रकार प्रगामी तरंगों का सुदृढ़ परिसीमा पर परावर्तन कला में उत्क्रमण अर्थात् 180 अथवा π रेडियन के कलांतर के साथ होता है ।

चित्र 15.11(b) में डोरी एक ऐसे छल्ले से बँधी है जो किसी छड़ पर बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे सरक सकता

है । इस स्थिति में जब स्पंद डोरी के बाएँ सिरे पर पहुँचता है, तो छल्ला छड़ पर ऊपर की ओर सरक जाता है । ऊपर की ओर जाते समय छल्ला डोरी को अपनी ओर खींचता है, फलस्वरूप डोरी तन जाती है और उसमें आपतित स्पंद के आयाम के बराबर आयाम एवं चिह्न का परावर्तित स्पंद उत्पन्न हो जाता है । अत: इस प्रकार के परावर्तन में आपतित व परावर्तित स्पंद एक-दूसरे को प्रबलित करते हैं, फलस्वरूप डोरी के इस सिरे पर विस्थापन अधिकतम होता है। यह विस्थापन आपतित स्पंद अथवा परावर्तित स्पंद के आयाम का दो गुना होता है, अत: इस परावर्तन में कला में कोई अंतर उत्पन्न नहीं होता । प्रगामी तरंगों के प्रकरण में जब परावर्तन खुली परिसीमा जैसे किसी आर्गन पाइप के खुले सिरे, पर होता है, तब परावर्तन के समय कला में कोई परिवर्तन नहीं होता ।

किसी परिसीमा अथवा दो भिन्न माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ से तरंगों के परावर्तन को सारांश में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।



चित्र 15.11(a) *दाईं ओर से आपतित कोई स्पंद डोरी के बाएँ सिरे से, जो दीवार से जुड़ा है, परावर्तित होता है। ध्यान दीजिए, परावर्तित स्पंद आपतित स्पंद का उलटा है । (b) इसमें डोरी का बायाँ सिरा एक ऐसे छल्ले से जो किसी छड़ पर ऊपर-नीचे बिना किसी घर्षण के सरक सकता है, बँधा है । ध्यान दीजिए, इस स्थिति में परावर्तित स्पंद उलटा नहीं है ।*

उपरोक्त प्रकथन को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए आपतित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_i(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

तब, सुदृढ़ परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = a \sin (kx + \omega t + \pi)$$
$$= -a \sin (kx + \omega t) \qquad (15.35)$$

किसी खुली परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = a \sin (kx + \omega t) \qquad (15.36)$$

15.6.1 अप्रगामी तरंगें तथा प्रसामान्य विधाएँ

पिछले अनुभाग में हमने एक सिरे पर परिसीमित निकाय पर विचार किया । आइए, अब हम किसी ऐसे निकाय पर विचार करें जिसके दोनों सिरे परिसीमित हों, जैसे दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी अथवा परिमित लंबाई का वायु कॉलम । मान लीजिए कि इस प्रकार के निकाय में हम किसी निश्चित आवृत्ति की कोई सतत् ज्यावक्रीय तरंग दाईं ओर भेजते हैं । जब यह तरंग दाएँ सिरे पर पहुँचती है, तो यह परावर्तित होकर वापस लौटना आरंभ कर देती है । बाईं ओर गमन करती यह तरंग, दाईं ओर पहले से ही गमन कर रही तरंग पर अतिव्यापित हो जाती है । जब बाईं ओर गमन करती तरंग बाएँ सिरे पर पहुँचती है, तो यह पुन: परावर्तित होती है तथा इस प्रकार बनी नयी परावर्तित तरंग दाईं ओर गमन करना आरंभ कर देती है और बाईं ओर गमन करने वाली तरंग पर अतिव्यापित हो जाती है । यह प्रक्रिया सतत् चलती रहती है, अत: बहुत ही शीघ्र माध्यम में बहुत-सी अतिव्यापित तरंगें हो जाती हैं जो एक दूसरे के साथ व्यतिकरण करती हैं । इस प्रकार के निकाय में, किसी बिंदु x पर तथा किसी क्षण t पर सदैव ही दो तरंगें होती हैं, जिनमें एक बाईं ओर गमन करती है जबकि दूसरी दाईं ओर । यदि हम इन तरंगों को इस प्रकार व्यक्त करें,

$y_1(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$ [x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती तरंग]

तथा $y_2(x, t) = a \sin (kx + \omega t)$ [x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गमन करती तरंग]

तब, अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार प्राप्त संयोजित तरंग इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$
$$= a\sin(kx-\omega t) + a\sin(kx+\omega t)$$
$$= (2a\sin kx)\cos\omega t \qquad (15.37)$$

समीकरण (15.37) द्वारा निरूपित तरंग किसी प्रगामी तरंग का वर्णन नहीं करती, चूँकि इस तरंग का तरंग रूप अथवा विक्षोभ किसी भी दिशा में गमन नहीं करता । यहाँ कोष्ठक में दी गई राशि $2a\sin kx$ स्थिति x पर अवस्थित डोरी अवयव के दोलन का आयाम है । इसके विपरीत, प्रगामी तरंग में सभी डोरी अवयवों का आयाम समान होता है । अत: समीकरण (15.37) **अप्रगामी तरंग** को, जिसमें तरंग रूप गमन नहीं करता, निरूपित करती है । चित्र 15.12 में इन तरंगों के निर्माण को निदर्शित किया गया है ।

यह देखा गया है कि अधिकतम अथवा न्यूनतम आयाम के बिंदु एक ही स्थिति पर स्थिर रहते हैं ।

kx के जिन मानों के लिए $\sin kx$ शून्य होता है, उन सभी स्थानों पर आयाम शून्य होता है अर्थात् शून्य आयाम के लिए,

$$kx = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

इस समीकरण में $k = 2\pi/\lambda$ लिखने पर

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad (15.38)$$

$(n = 0, 1, 2, 3\ldots)$ के लिए

शून्य आयाम की स्थितियों को **निस्पंद** कहते हैं । ध्यान दीजिए, दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ अथवा आधी तरंगदैर्घ्य के बराबर होती है ।

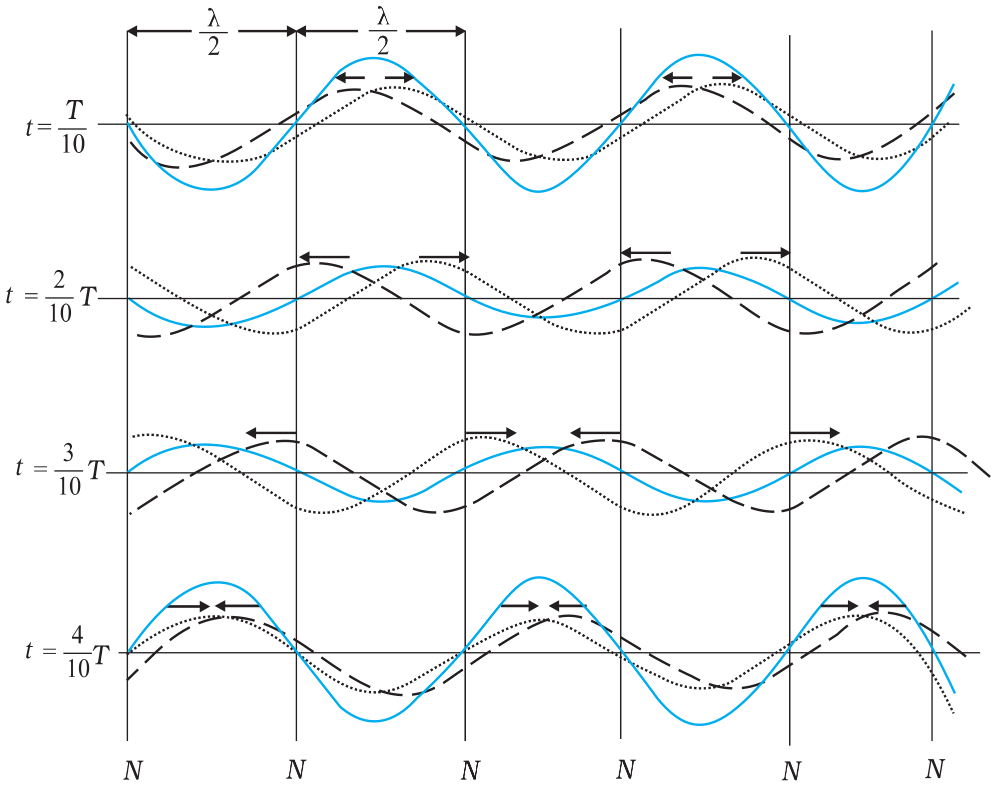
kx के जिन मानों के लिए $|\sin kx| = 1$ होता है, उन स्थानों पर आयाम का मान अधिकतम अर्थात् $2a$ होता है, अर्थात् अधिकतम आयाम के लिए

$$kx = (n + \frac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

इस समीकरण में $k = 2\pi/\lambda$ लिखने पर

$$x = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \qquad (15.39)$$

$(n = 0, 1, 2, 3\ldots)$ के लिए



चित्र 15.12 *तानित डोरी में अप्रगामी तरंग का निर्माण । समान आयाम की दो ज्यावक्रीय तरंगें विपरीत दिशाओं में डोरी के अनुदिश गमन करती हैं । इसमें चित्रों का सेट चार भिन्न समयों पर विस्थापनों की अवस्थाओं को निरूपित करता है । जिन स्थितियों पर N अंकित है वहाँ हर समय विस्थापन शून्य होता है । इन स्थितियों को निस्पंद कहते हैं ।*

अधिकतम आयाम की स्थितियाँ प्राप्त होती हैं जिन्हें **प्रस्पंद** कहते हैं। ध्यान दीजिए, दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है तथा दो क्रमागत निस्पंदों के मध्य में एक प्रस्पंद स्थित होता है।

दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई की तानित डोरी के दोनों सिरों पर निस्पंद होते हैं। यदि दोनों सिरों में से किसी एक सिरे की स्थिति को $x = 0$ चुनें, तब दूसरे सिरे की स्थिति $x = L$ होती है। यदि यह सिरा निस्पंद है, तो लंबाई L को निम्नलिखित शर्त का पालन करना चाहिए,

$$L = n\frac{\lambda}{2} \tag{15.40}$$

($n = 1, 2, 3...$) के लिए

इस शर्त से यह ज्ञात होता है कि L लंबाई की डोरी पर सीमित तरंगदैर्घ्य की अप्रगामी तरंगें बन सकती हैं जिनका मान निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त किया जाता है,

$$\lambda = \frac{2L}{n} \tag{15.41}$$

($n = 1, 2, 3...$) के लिए

इन तरंगदैर्घ्यों के तदनुरूपी आवृत्तियों के मान समीकरण (15.12) की सहायता से ज्ञात किए जा सकते हैं

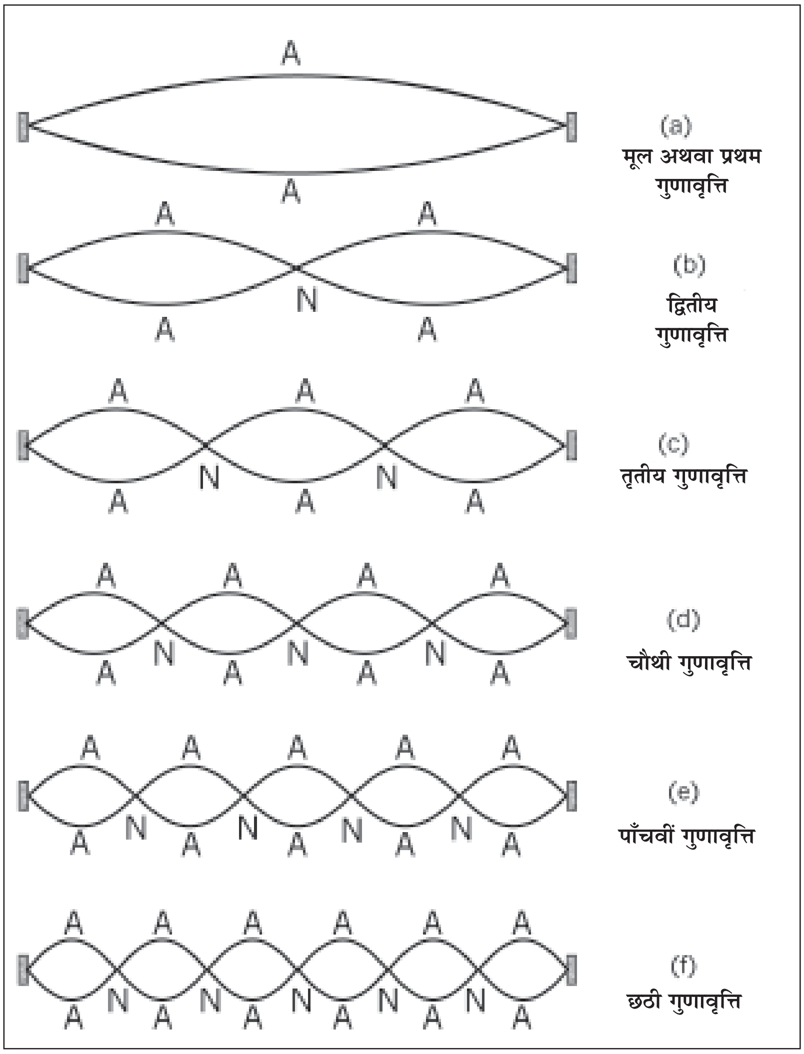
$$\nu = n\frac{v}{2L} \tag{15.42}$$

($n = 1, 2, 3...$) के लिए

यहाँ v डोरी पर प्रगामी तरंगों की चाल है। समीकरण (15.42) से प्राप्त आवृत्तियों का सेट निकाय की प्राकृतिक आवृत्तियाँ अथवा **विधाएँ** कहलाती हैं। इस समीकरण से हमें यह ज्ञात होता है कि किसी डोरी की प्राकृतिक आवृत्तियाँ $n = 1$ के तदनुरूपी निम्नतम आवृत्ति $\nu = \frac{v}{2L}$ की पूर्णांकीय गुणज होती हैं। इस निम्नतम आवृत्ति की दोलन विधा को **मूल विधा** अथवा **प्रथम गुणावृत्ति** कहते हैं। $n = 2$ की दोलन विधा को **द्वितीय गुणावृत्ति** कहते हैं। $n = 3$ के तदनुरूपी तृतीय गुणावृत्ति होती है और इसी प्रकार अगली गुणावृत्तियाँ होती हैं। इन विधाओं से संबद्ध आवृत्तियों को $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3...$ द्वारा चिह्नित किया जाता है। सभी संभव विधाओं के समूह को गुणावृत्ति श्रेणी तथा n को गुणावृत्ति संख्या कहते हैं।

चित्र 15.13 में दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में कुछ गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, दोनों सिरों पर परिबद्ध कोई तानित डोरी एक ही क्षण एक से अधिक विधाओं से कंपन कर सकती है। कौन-सी विधा अधिक प्रबलता से उत्तेजित है यह इस पर निर्भर करता है कि डोरी को किस बिंदु पर झंकृत किया गया है। सितार व वायलिन जैसे वाद्य यंत्र इस सिद्धांत पर आधारित है।

अब हम किसी ऐसे निकाय के कंपनों की विधाओं का अध्ययन करेंगे जिनका एक सिरा बंद है जबकि दूसरा सिरा मुक्त है। अंशतः जल से भरी लंबी काँच की नलिका का वायु-कॉलम ऐसे निकाय का एक उदाहरण है। वायु के कॉलम को नलिका में जल के स्तर को परिवर्तित करके समायोजित किया जा सकता है। वायु-कॉलम में जल से छूने वाले सिरे पर विस्थापन अथवा घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, क्योंकि परावर्तित तथा आपतित तरंगें ठीक विपरीत कलाओं में होती हैं। इसी कारण से



चित्र 15.13 दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में अप्रगामी तरंगें। कंपन की कई विधाएँ दर्शायी गई हैं।

इस स्थान पर दाब में परिवर्तन अधिकतम होते हैं, क्योंकि जब संपीडन का परावर्तन होता है तब इस स्थान पर दाब दो गुना हो जाता है, तथा जब विरलन का परावर्तन होता है तब इस स्थान पर दाब घटकर आधा रह जाता है । इसके विपरीत, खुले सिरे पर अधिकतम घनत्व परिवर्तन तथा न्यूनतम दाब परिवर्तन होते हैं। यहाँ पर विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगें एक ही कला में होती हैं इसलिए यहाँ दाब में कोई परिवर्तन नहीं होते ।

अब यदि वायु-कॉलम की लंबाई L है, तो खुला सिरा $x = L$ एक प्रस्पंद होता है, अतः समीकरण (15.39) से यह परिणाम निकलता है कि,

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3...)$$

अथवा वह विधाएँ जो निम्न शर्त का पालन करती हैं, इस प्रकार के वायु कॉलमों में स्थायी बनी रह सकती है,

$$\lambda = \frac{2L}{(n+1/2)} \qquad (15.43)$$

$(n = 0, 1, 2, 3...)$ के लिए

इस प्रकार के वायु-कॉलम में कंपन की विभिन्न विधाओं की तदनुरूपी आवृत्तियाँ इस प्रकार व्यक्त की जाती हैं,

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L} \qquad (15.44)$$

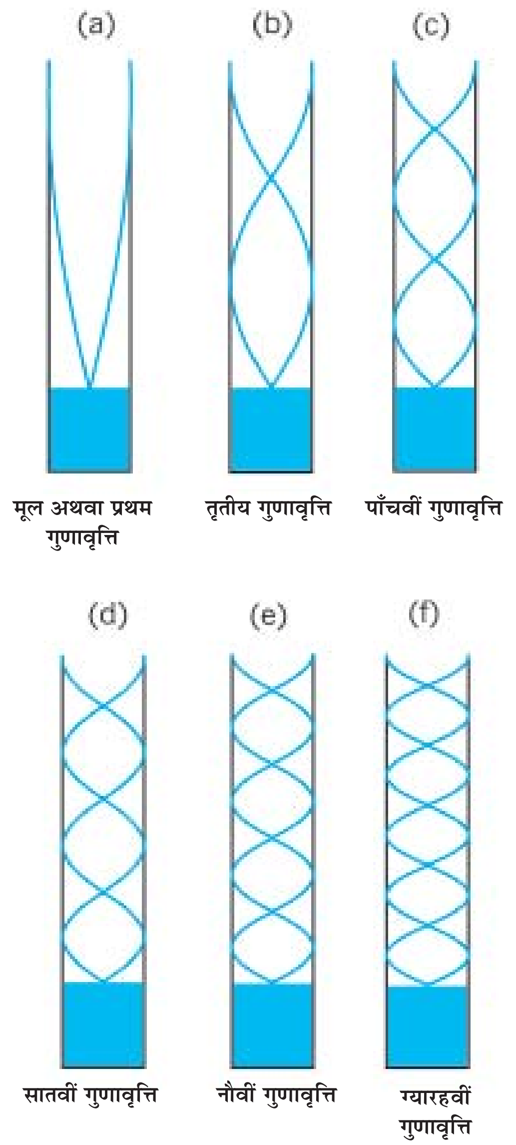
$(n = 0, 1, 2, 3...)$ के लिए

चित्र 15.14 में एक सिरे से खुले किसी वायु-कॉलम के कंपन की कुछ प्रसामान्य विधाएँ दर्शायी गई हैं । इसकी मूल आवृत्ति $\frac{v}{4L}$ है तथा अन्य उच्च आवृत्तियाँ मूल आवृत्ति की विषम गुणावृत्तियाँ अर्थात् $3\frac{\nu}{4L}$, $5\frac{\nu}{4L}$ आदि होती हैं ।

दोनों सिरों पर खुले पाइप के लिए दोनों सिरों पर दो प्रस्पंद बनते हैं, और सभी गुणावृत्तियाँ उत्पन्न होती हैं।

किसी पात्र की परिधि से दृढ़तापूर्वक परिबद्ध वृत्ताकार झिल्ली, उदाहरणार्थ, तबले की झिल्ली के कंपनों की प्रसामान्य विधाओं का निर्धारण इस परिसीमा शर्त के द्वारा किया जाता है कि झिल्ली की परिधि पर स्थित कोई भी बिंदु कंपन नहीं करता । इस निकाय के कंपन की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों का आकलन अधिक जटिल कार्य है । इस समस्या में दो विमाओं में तरंग संचरण सम्मिलित होता है । फिर भी इसमें अन्तर्निहित भौतिकी वही है ।

उपरोक्त चर्चा में हमने यह देखा कि दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी में, समीकरण (15.42) में दिए अनुसार, कुछ निश्चित आवृत्तियों की ही प्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं, अथवा

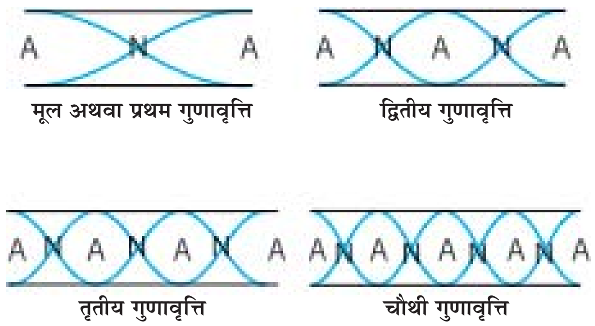


चित्र 15.14 एक सिरे से खुले किसी वायु-कॉलम के कंपन की कुछ प्रसामान्य विधाएँ।

यह निकाय इन आवृत्तियों पर **अनुनाद** करता है । इसी प्रकार, एक सिरे पर खुला वायु-कॉलम समीकरण (15.44) द्वारा दी गई आवृत्तियों पर अनुनाद करता है ।

उदाहरण 15.5 दोनों सिरों से खुले किसी पाइप की लंबाई 30.0 cm है । 1.1 kHz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा को अनुनाद द्वारा उत्तेजित किया जाता है ? यदि इस पाइप के एक सिरे को बंद कर दिया जाए तो क्या हम फिर भी इसी स्रोत द्वारा अनुनाद सुन सकते हैं ? वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है ।

हल: खुले पाइप के कंपन की पहली कुछ विधाएँ चित्र 15.15 में दर्शायी गई हैं । पहली गुणावृत्ति की आवृत्ति,



चित्र 15.15 *किसी खुले पाइप में अप्रगामी तरंगें । पहली चार गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं ।*

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \qquad \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ L पाइप की लंबाई है । n वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3...) \ \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ $L = 30.0$ cm, $v = 330$ m s^{-1}

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \ \text{m} \ \text{s}^{-1}}{2 \times 0.3 \ \text{m}} = 550 \ n\text{s}^{-1}$$

स्पष्ट है कि 1.1 kHz आवृत्ति का स्रोत, अनुनाद द्वारा ν_2 आवृत्ति अर्थात् द्वितीय गुणावृत्ति को उत्तेजित करेगा ।

अब यदि पाइप का एक सिरा बंद है तब समीकरण (15.40) से यह परिणाम निकलता है कि इस पाइप की मूल आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} \qquad \text{(एक सिरे पर बंद पाइप)}$$

इस पाइप में केवल विषम संख्या की गुणावृत्तियाँ ही विद्यमान होती हैं :

$$\nu_3 = \frac{3v}{4L}, \quad \nu_5 = \frac{5v}{4L} \quad \text{तथा इसी प्रकार आगे भी...।}$$

$L = 30$ cm तथा $v = 300$ m s^{-1} के लिए, एक सिरे से बंद पाइप की मूल आवृत्ति 275 Hz है तथा स्रोत की आवृत्ति चतुर्थ गुणावृत्ति के तद्नुरूपी है। चूँकि यह गुणावृत्ति पाइप के कंपन की संभावित विधा नहीं है, अत: इस स्रोत के साथ पाइप का एक सिरा बंद करने पर कोई अनुनाद सुनाई नहीं देगा। ◀

15.7 विस्पंदें

यदि हम कुछ मिनट के समय अंतराल में दो ऐसी ध्वनियों को सुनें जिनकी आवृत्तियों में बहुत कम अंतर है, जैसे 256 Hz तथा 260 Hz, तो हम उनमें भेद नहीं कर पाएंगे । परंतु यदि हम इन दोनों ध्वनियों को साथ-साथ एक ही समय सुनें, तो जो कुछ हम सुनेंगे उसकी आवृत्ति 258 Hz होगी, जो कि इन दो संयोजित आवृत्तियों का **माध्य** है । साथ ही हम इस ध्वनि की तीव्रता में आश्चर्यजनक परिवर्तन भी सुनेंगे-ध्वनि की तीव्रता धीरे-धीरे तरंगित **विस्पंद** के रूप में घटेगी और बढ़ेगी, जिसकी पुनरावृत्ति की आवृत्ति 4 Hz, जो कि प्रवेशी ध्वनियों की आवृत्तियों का **अंतर** है। दो लगभग समान आवृत्तियों की तरंगों के परस्पर एक दूसरे पर अध्यारोपण द्वारा ध्वनि की तीव्रता में उतार-चढ़ाव होने की परिघटना को **विस्पंद** कहते हैं ।

संगीत स्तंभ

मंदिरों में, स्तंभों पर बनी संगीत वाद्य बजाती मानवमूर्तियाँ अक्सर देखने में आती हैं, लेकिन, ये स्तंभ, स्वयं संगीत शायद ही कहीं उत्पन्न करते हों। तमिलनाडु के नेल्ल्याप्पर मंदिर में एकल शिला में उत्कीर्णित ऐसे स्तंभों का समूह है जिनको धीरे से टकटकाने पर, भारतीय शास्त्रीय संगीत के मूल स्वर – सा, रे, गा, मा, पा, धा, नी, सा, उत्पन्न होते हैं। इन स्तंभों के कंपन उनमें इस्तेमाल किए गए पत्थर की प्रत्यास्थता, घनत्व और स्तंभ के आकार पर निर्भर करते हैं।

संगीत स्तंभों को तीन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है : पहली श्रेणी में है **श्रुति स्तंभ** जो प्राथमिक स्वर-सरगम उत्पन्न करते हैं, दूसरी श्रेणी है **गण-थूंगल** की जो रागों की मूल धुनें उत्पन्न करते हैं और तीसरी श्रेणी है **लय थूंगल** की, यह वह स्तंभ है जो थाप लगाने पर ताल उत्पन्न करते हैं। नेल्ल्याप्पर मंदिर के स्तंभ श्रुति एवं लय श्रेणी के हैं।

पुरातत्ववेत्ता मानते हैं कि नेल्ल्याप्पर मंदिर पाण्डयन कुल के शासकों द्वारा सातवीं शताब्दी में बनवाये गए थे।

नेल्ल्याप्पर मंदिर तथा दक्षिण भारत में बने कई दूसरे मंदिरों (जैसे हम्पी (देखिये चित्र), कन्याकुमारी और तिरुअनन्तपुरम् के मंदिर) में लगे संगीत-स्तंभ हमारे देश की ही विशिष्टता है और दुनिया के किसी भी भाग में ये नहीं पाए जाते।

खुले पाइप में ध्वनि का परावर्तन

जब खुले पाइप में चलता हुआ वायु का, उच्च दाब वाला कोई स्पंद इसके दूसरे सिरे पर पहुँचता है, तो इसका संवेग वायु को खुले में खींच निकालता है इसलिए यहाँ दाब तेजी से गिरकर वायुमण्डलीय दाब के बराबर हो जाता है। परिणामस्वरूप इस स्पंद के पीछे आने वाली कुछ वायु भी बाहर निकल जाती है। पाइप में इस सिरे पर कम दाब, पाइप में, इससे ऊपर की कुछ वायु को नीचे खींचता है। इससे कम दाब का यह क्षेत्र ऊपर की ओर चलता है।

परिणामत: नीचे की ओर चलता हुआ उच्च दाब का स्पंद, न्यून दाब के वायु स्पंद में बदल कर ऊपर की ओर चलता है। हम कहते हैं कि दाब तरंग खुले सिरे से परावर्तित होती है तो इसकी कला में 180 का अंतर आ जाता है। बाँसुरी जैसे खुले ऑर्गन पाइप में अप्रगामी तरंगों का बनना इसी प्रक्रम का परिणाम है।

तुलना के लिए देखें, कि जब उच्च दाब का वायु स्पंद, बंद सिरे पर पहुँचता है, तो क्या होता है: बंद सिरे से टकराकर वायु विपरीत दिशा में वापस लौटती है। यहाँ हम कहते हैं कि दाब तरंग बिना किसी कलांतर के परिवर्तित होती है।

आइए, अब हम यह ज्ञात करें कि क्या होता है जब, ऐसी दो तरंगें जिनकी आवृत्तियों में बहुत कम अंतर हो, एक दूसरे पर अध्यारोपण करती हैं । मान लीजिए, किसी विशेष स्थान पर दो ध्वनि तरंगों के कारण विस्थापनों में कालाश्रित परिवर्तन इस प्रकार है–

$$s_1 = a\cos\omega_1 t \text{ तथा } s_2 = a\cos\omega_2 t \qquad (15.45)$$

यहाँ $\omega_1 > \omega_2$ । सुगमता के लिए हमने यह माना है कि तरंगों के आयाम तथा कलाएँ समान हैं। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, परिणामी विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

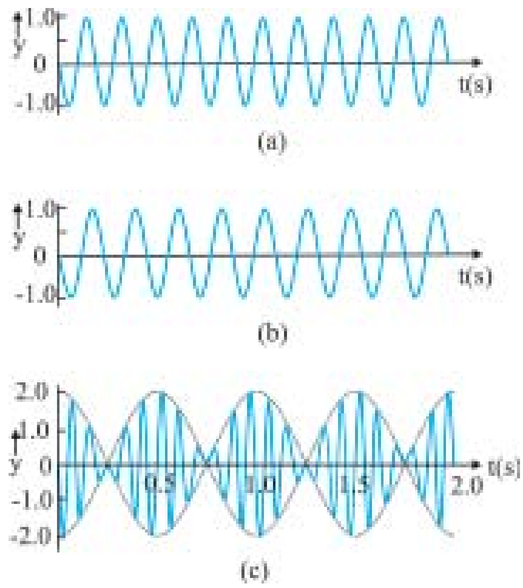
$$s = s_1 + s_2 = a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

$$= 2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t \qquad (15.46)$$

यदि हम $\omega_b = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ तथा $\omega_a = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ लिखें तब समीकरण (15.46) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$s = [2\,a\cos\omega_b t]\cos\omega_a t \qquad (15.47)$$

यदि $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$; $\omega_a >> \omega_b$ है, तब समीकरण (15.47) में विस्थापन समय के साथ मुख्यत: इस cosine फलन से निर्धारित होता है जिसकी कोणीय आवृत्ति ω_a है। कोष्ठक में दी गई राशि को इस फलन का आयाम माना जा सकता है (जो एक अचर नहीं है बल्कि इसकी कोणीय आवृत्ति ω_b में लघु परिवर्तन होता है) । जब भी $\cos\omega_b t$ का मान + 1 अथवा –1 होता है यह आयाम अधिकतम हो जाता है, तथा ऐसा कोज्या (cos) फलन की प्रत्येक पुनरावृत्ति में दो बार होता है । चूँकि ω_1 तथा ω_2 में बहुत कम अंतर है, ω_a में और इन दोनों आवृत्तियों में से किसी भी एक के बीच भेद करना आसान



चित्र 15.16 *(a) 11 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (b) 9 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (c) तरंगों (a) तथा (b) का अध्यारोपण। स्पष्टत:, यहाँ 2 Hz आवृत्ति के कुल विक्षोभ के धीमे मादुलन में विस्पंद दर्शाए गए हैं ।*

कार्य नहीं है । अत: लगभग समान आवृत्तियों की तरंगों के अध्यारोपण का परिणाम एक ऐसी तरंग होती है जिसकी कोणीय आवृत्ति लगभग समान होती है परंतु आयाम अचर नहीं होता । अत: परिणामी ध्वनि की तीव्रता में कोणीय आवृत्ति $\omega_{beat} = 2\,\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ के साथ परिवर्तन होता है । अब संबंध $\omega = 2\pi\nu$ का उपयोग करके हम विस्पंद आवृत्ति ν_{beat} को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\upsilon_{beat} = \upsilon_1 - \upsilon_2 \qquad (15.48)$$

अतः, हमें परिणामी ध्वनि में अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों में अंतर के बराबर आवृत्ति के उतार-चढ़ाव सुनाई देते हैं । चित्र 15.16(a) तथा 15.16(b) में क्रमशः 11 Hz तथा 9 Hz आवृत्तियों की तरंगों के विस्थापन-समय ग्राफ दर्शाए गए हैं । चित्र 15.16(c) में इन तरंगों के अध्यारोपण का परिणाम दर्शाया गया है ।

संगीतज्ञ विस्पंद परिघटना का उपयोग अपने वाद्यों के समस्वरण में करते हैं । यदि कोई वाद्य-यंत्र किसी मानक आवृत्ति के यंत्र के साथ बजाया जाता है, तब वे अपने यंत्र को विस्पंद समाप्त होने तक समस्वर करते रहते हैं तथा विस्पंद समाप्त होने पर उनका वाद्य यंत्र मानक के साथ समस्वरित हो जाता है ।

▶ ***उदाहरण 15.6*** दो सितारों की डोरियाँ A तथा B एक साथ 'धा' स्वर बजा रहीं हैं तथा स्वरों में थोड़ा अंतर होने के कारण 5 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं । डोरी B के तनाव में कुछ वृद्धि करने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है । यदि A की आवृत्ति 427 Hz है, तो B की मूल आवृत्ति ज्ञात कीजिए ।

हल : डोरी में तनाव बढ़ाने पर उसकी कंपन की आवृत्ति बढ़ जाती है । यदि डोरी B की मूल आवृत्ति (ν_B) A की आवृत्ति (ν_A) से अधिक है, तब ν_B में और वृद्धि होने पर विस्पंदों की आवृत्ति बढ़नी चाहिए, परंतु विस्पंद-आवृत्ति में गिरावट पाई गई । अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $\nu_B < \nu_A$ । चूँकि $\nu_A - \nu_B = 5\text{Hz}$, तथा $\nu_A = 427$ Hz, अतः डोरी B की मूल आवृत्ति $\nu_B = 422$ Hz ◀

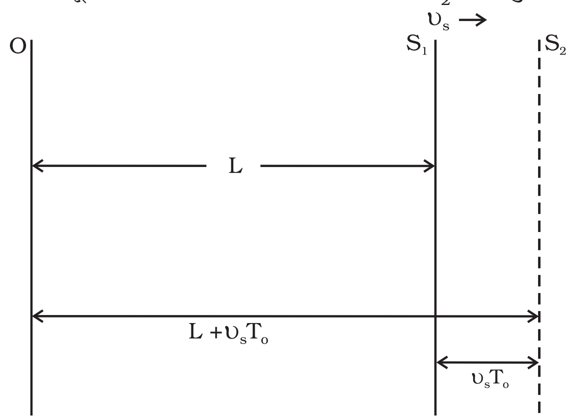
15.8 डॉप्लर प्रभाव

यह हमारे दैनिक जीवन का अनुभव है कि जब कोई सीटी बजाती हुई तीव्रगामी रेलगाड़ी हमसे दूर जाती है, उस सीटी के तारत्व (अथवा आवृत्ति) में कमी होती जाती है । जब हम तीव्र गति से किसी ध्वनि-स्रोत के निकट जाते हैं, तब सुनाई देने वाली ध्वनि का तारत्व ध्वनि-स्रोत के वास्तविक तारत्व से अधिक प्रतीत होता है। इसके विपरीत जब कोई प्रेक्षक ध्वनि-स्रोत से दूर हटता जाता है, तो प्रेक्षित तारत्व ध्वनि-स्रोत के वास्तविक तारत्व से कम होता है । इस गति संबंधी आवृत्ति परिवर्तन को **डॉप्लर प्रभाव** कहते हैं । आस्ट्रिया के भौतिकविद जोहान क्रिश्चियन डॉप्लर ने सर्वप्रथम सन् 1842 ई. में इस प्रभाव को प्रस्तावित किया । सन् 1845 में हॉलैंड में बाईस बैलो ने इसका प्रायोगिक परीक्षण किया । डॉप्लर प्रभाव एक तरंग-परिघटना है, यह केवल ध्वनि तरंगों पर ही लागू नहीं होता, बल्कि यह सभी विद्युत चुंबकीय तरंगों पर भी लागू होता है । लेकिन, हम यहाँ केवल ध्वनि तरंगों पर ही विचार करेंगे ।

हम तीन विभिन्न परिस्थितियों में आवृत्ति में परिवर्तन का विश्लेषण करेंगे : (1) प्रेक्षक स्थिर है परंतु स्रोत गतिशील है, (2) प्रेक्षक गतिशील है परंतु स्रोत स्थिर है, तथा (3) प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों गतिशील हैं । प्रेक्षक तथा माध्यम के बीच सापेक्ष गति होने अथवा न होने के कारण परिस्थितियाँ (1) व (2) एक दूसरे से भिन्न हैं । अधिकांश तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है; फिर भी, विद्युत चुंबकीय तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । यदि कोई माध्यम न हो, तो इन दोनों परिस्थितियों में भेद करने का कोई उपाय नहीं होने के कारण, चाहे प्रेक्षक गतिशील हो अथवा स्रोत, डॉप्लर-विस्थापन समान होता है ।

15.8.1 स्रोत गतिशील; प्रेक्षक स्थिर

वेग की दिशा के संबंध में हम यह परिपाटी बना लेते हैं कि प्रेक्षक से स्रोत की ओर वेग धनात्मक है। अब हम एक स्रोत S पर विचार करते हैं जो υ_s वेग से गतिमान है और प्रेक्षक एक ऐसे फ्रेम में स्थिर है जिसमें माध्यम भी स्थिर है। मान लीजिए कि कोई तरंग, जिसकी माध्यम के सापेक्ष विराम अवस्था स्थिति प्रेक्षक द्वारा मापी गई कोणीय आवृत्ति ω तथा आवर्तकाल T_0 है, की चाल υ है । हम मानते हैं कि प्रेक्षक के पास एक संसूचक (detector) है जो इसके पास पहुँचने वाले प्रत्येक तरंग-शिखर (crest) को गिनता है । समय $t = 0$ पर जब स्रोत बिंदु S_1 पर अवस्थित है (देखें चित्र 15.17), स्रोत एक तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । इस समय ($t = 0$) पर स्रोत प्रेक्षक से L दूरी पर है । यह तरंग-शिखर प्रेक्षक के पास समय $t_1 = (L/\upsilon)$ पर पहुँचता है । समय $t = T_0$ पर स्रोत प्रेक्षक की ओर $\upsilon_s T_0$ दूरी चल लेता है और बिंदु S_2 पर पहुँच जाता है जिसकी प्रेक्षक से दूरी $(L+\upsilon_s T_0)$ है। बिंदु S_2 पर स्रोत एक और (दूसरा) तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । यह दूसरा तरंग-शिखर प्रेक्षक तक समय t_2 पर पहुँचता है,



चित्र 15.17 *विराम की स्थिति में O पर खड़े प्रेक्षक से परे υ_s चाल से गतिशील कोई स्रोत बिंदु S_1 पर एक तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । यही स्रोत O, $\upsilon_s T_0$ दूरी चलने के पश्चात् बिंदु S_2 से दूसरा तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है ।*

$$t_2 = T_0 + \frac{(L + v_s T_0)}{v}$$

समय nT_0 पर स्रोत $(n+1)$ वाँ तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है जो प्रेक्षक तक जिस समय t_n पर पहुँचता है उसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$t_{n+1} = nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v}$$

अतः समय अंतराल

$$\left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v}\right]$$

में प्रेक्षक का संसूचक n तरंग-शिखर गिनता है तथा प्रेक्षक तरंग का आवर्तकाल T नीचे दिए अनुसार रिकार्ड करता है

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v}\right]/n$$

$$= T_0 + \frac{v_s T_0}{v}$$

$$= T_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.49)$$

समीकरण (15.49) को हम आवृत्ति के पदों में भी लिख सकते हैं। यदि ν_0 वह आवृत्ति है जो स्रोत एवं प्रेक्षक दोनों के विराम में होने पर मापी गई है तथा ν वह प्रेक्षित आवृत्ति है जो स्रोत के गतिशील होने पर है, तो प्रेक्षित आवृत्ति,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \qquad (15.50)$$

यदि तरंग चाल v की तुलना में स्रोत की चाल v_s का मान कम है तो द्विपद प्रसरण के $\frac{v_s}{v}$ से उच्चतर घातों के पदों को न लेकर, समीकरण (15.50) को सन्निकटतः इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.51)$$

यदि स्रोत प्रेक्षक की ओर आ रहा हो तो v_s को $(-v_s)$ से प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.52)$$

अतः जब कोई ध्वनि स्रोत किसी प्रेक्षक से दूर जाता है तब उस स्थिति की तुलना में जब यह विराम पर था, प्रेक्षक अपेक्षाकृत कम आवृत्ति मापता है। जब स्रोत उसकी ओर चलता है तो यह तरंगों की आवृत्ति अधिक मापता है।

15.8.2 प्रेक्षक गतिशील; स्रोत स्थिर

अब उस स्थिति में, जब प्रेक्षक स्रोत की ओर v_0 चाल से गतिमान हो, तथा स्रोत विराम में हो, तो डॉप्लर विस्थापन को व्युत्पन्न करने के लिए हमें दूसरे ढंग से आगे बढ़ना होगा। हम गतिशील प्रेक्षक के निर्देश फ्रेम में कार्य करेंगे। इस निर्देश फ्रेम में स्रोत तथा प्रेक्षक चाल v_0 से समीप आते हैं तथा तरंग के समीप आने की चाल $v_0 + v$ है। पिछली परिस्थिति में जो ढंग अपनाया गया था उसी को इस परिस्थिति में भी अपनाने पर हम यह पाते हैं कि पहले तरंग शिखर तथा $(n+1)$ वें तरंग शिखर के प्रेक्षक तक पहुँचने के बीच समय अंतराल इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$t_{n+1} - t_1 = n\,T_0 - \frac{n\,v_0 T_0}{v_0 + v}$$

अतः, प्रेक्षक द्वारा मापा गया तरंग का आवर्त काल

$$T = T_0\left(1 - \frac{v_0}{v_0 + v}\right)$$

$$= T_0\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)^{-1}$$

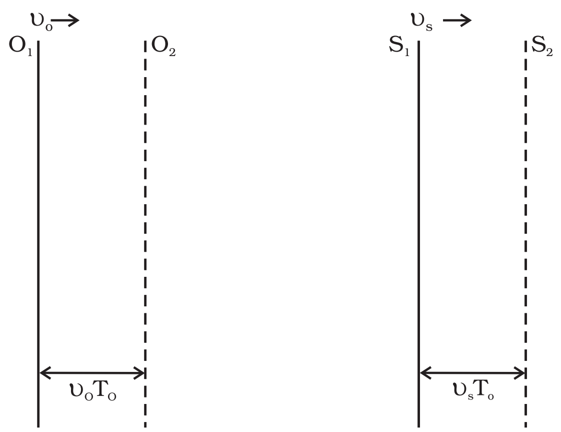
आवृत्ति के पदों में इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \qquad (15.53)$$

यदि $\frac{v_0}{v}$ का मान कम है, तब डॉप्लर विस्थापन लगभग वही होगा, चाहे प्रेक्षक गति करे अथवा स्रोत, क्योंकि समीकरण (15.53) तथा सन्निकट संबंध (15.51) समान हैं।

15.8.3 स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों गतिशील हैं

अब हम डॉप्लर प्रभाव के लिए, स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों को गतिशील लेकर व्यापक व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे। पहले की तरह हम प्रेक्षक से स्रोत की दिशा को धनात्मक दिशा मानेंगे। मान लीजिए चित्र 15.18 की भाँति स्रोत तथा प्रेक्षक क्रमशः v_s तथा v_0 वेग से गतिशील हैं, माना समय $t = 0$ पर प्रेक्षक O_1 पर तथा स्रोत S_1(O) की बाईं ओर है। माध्यम के सापेक्ष स्थिर एक प्रेक्षक देखता है कि स्रोत वेग v, आवृति ν और आवर्त काल T_0 की तरंग उत्सर्जित करता है। $t = 0$ पर जब स्रोत पहला तरंग शिखर उत्सर्जित करता हो उस समय प्रेक्षक O_1 की स्रोत S_1 से दूरी L है। अब चूँकि प्रेक्षक गतिशील है, इसलिए तरंग की प्रेक्षक के सापेक्ष चाल $(v + v_0)$ है। अतः पहला तरंग-शिखर प्रेक्षक पर समय $t_1 = L/(v + v_0)$ पर पहुँचता है। समय $t = T_0$ पर प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों ही अपनी नयी स्थितियों क्रमशः O_2 तथा S_2 पर पहुँच जाते हैं। प्रेक्षक तथा स्रोत के बीच की नयी दूरी,



चित्र 15.18 *υ_0 चाल से गतिमान प्रेक्षक υ_s चाल से गतिमान स्रोत। समय $t = 0$ पर दोनों की अवस्थितियाँ क्रमश: O_1 तथा S_1 है जब स्रोत ध्वनि (जिसका माध्यम के सापेक्ष वेग υ है) का पहला तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है। एक आवर्त काल के बाद ($t = T_0$) प्रेक्षक $\upsilon_0 T_0$ दूरी चलकर O_2 पर तथा स्रोत $\upsilon_s T_0$ दूरी चलकर S_2 पर पहुँच जाते हैं, जब स्रोत अगला तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है।*

$O_2S_2 = [L + (\upsilon_0 - \upsilon_s)/T_0]$ है । S_2 पर स्रोत दूसरा तरंग-शिखर उत्सर्जित कर देता है । यह तरंग-शिखर प्रेक्षक तक समय t_2 पर पहुँचता है जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$t_2 = T_0 + [L - (\upsilon_s - \upsilon_0)T_0]/(\upsilon + \upsilon_0)$$

समय nT_0 पर, स्रोत $(n+1)$ वाँ तरंग-शिखर उत्सर्जित कर देता है जो समय t_{n+1} पर प्रेक्षक पर पहुँचता है जिसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$t_{n+1} = nT_0 + [L - n(\upsilon_s + \upsilon_0)T_0)] / (\upsilon + \upsilon_0)$$

अत: समय अंतराल, $(t_{n+1} - t)$

$$nT_0 + [L + n(\upsilon_s + \upsilon_0)T_0]/(\upsilon + \upsilon_0) - L/(\upsilon + \upsilon_0)$$

में प्रेक्षक n तरंग-शिखर गिनता है तथा प्रेक्षक तरंग का आवर्तकाल T रिकार्ड करता है जिसे इस संबंध द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$T = T_0\left(1 + \frac{\upsilon_s - \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_0}\right)$$

$$= T_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_s}{\upsilon + \upsilon_0}\right) \quad (15.54)$$

आवृत्ति के पदों में प्रेषक द्वारा प्रेक्षित आवृत्ति को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_s}\right) \quad (15.55)$$

सोचिए कि सीधी पटरियों पर चलती हुई किसी रेलगाड़ी में एक महिला यात्री बैठी है। माना कि वह रेलगाड़ी के ड्राइवर द्वारा बजायी गई सीटी की ध्वनि सुनती है। वह क्या आवृत्ति सुनेगी? यहाँ स्रोत और प्रेक्षक दोनों ही समान वेग से चल रहे हैं अत: आवृत्ति में कोई अंतर नहीं आएगा और यात्री वही प्राकृतिक आवृत्ति सुनेगी जो स्रोत उत्पन्न कर रहा है। लेकिन रेल की पटरियों के पास खड़ा कोई प्रेक्षक प्राकृतिक आवृत्ति से अधिक आवृत्ति नोट करेगा जब रेलगाड़ी उसकी ओर आती है और कम आवृत्ति नोट करेगा जब रेलगाड़ी उससे दूर जाती है।

ध्यान दें कि हमने प्रेक्षक से स्रोत की दिशा को धनात्मक दिशा कहा है। इसलिए यदि प्रेक्षक स्रोत की ओर चल रहा है तो υ_0 का मान धनात्मक है जबकि यदि वह स्रोत S से दूर जा रहा

डॉप्लर प्रभाव के अनुप्रयोग

गतिमान पिण्डों की आवृत्तियों में, डॉप्लर प्रभाव के कारण आने वाले अंतर का उपयोग, सेना, औषधि विज्ञान, खगोलिकी जैसे विविध क्षेत्रों में पिण्डों का वेग मापने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग पुलिस यह जाँचने के लिए भी करती है कि कोई गाड़ी गतिसीमा से अधिक गति से तो नहीं चलाई जा रही।

ज्ञात आवृत्ति की ध्वनि या विद्युत चुंबकीय तरंगों को गतिमान पिण्ड की ओर भेजा जाता है। मॉनीटरिंग स्टेशन पर, पिण्ड द्वारा परावर्तित तरंगें प्राप्त करके इनकी आवृत्ति ज्ञात की जाती है। इन दो आवृत्तियों का अंतर **डॉप्लर विस्थापन** कहलाता है।

हवाई अड्डों पर वायुयानों के मार्गदर्शन के लिए, सेना में शत्रु यानों के संसूचन के लिए इस विधि का उपयोग किया जाता है। खगोल भौतिकीविद तारों का वेग मापने के लिए इसका उपयोग करते हैं।

डॉक्टर लोग हृदय स्पंदनों और शरीर के विभिन्न अंगों में रक्त प्रवाह का अध्ययन करने के लिए इसका उपयोग करते हैं। यहाँ वे पराध्वनि तरंगों का उपयोग करते हैं और सामान्य व्यवहार में इसे **सोनोग्राफी** कहा जाता है। पराध्वनि तरंगें व्यक्ति के शरीर में प्रवेश करती हैं और इनमें से कुछ परावर्तित हो जाती हैं तथा रक्त की गति और हृदय के वाल्बों के स्पंदन के विषय में जानकारी प्रदान करती है, इसमें भ्रूण के हृदय का स्पंदन भी शामिल है। हृदय से परावर्तित तरंगों से जो चित्र बनता है उसे **इकोकार्डियोग्राम** कहा जाता है।

हो तो v_0 का मान ऋणात्मक है। दूसरी ओर यदि S प्रेक्षक O से दूर जा रहा है तो v_s का मान धनात्मक है जबकि यदि वह O की ओर आ रहा है तो v_s का मान ऋणात्मक है। स्रोत द्वारा उत्सर्जित ध्वनि सभी दिशाओं में गमन करती है। इस ध्वनि का जो भाग प्रेक्षक की ओर आता है उसको ही वह संसूचित करता है। इसी कारण प्रत्येक स्थितियों में प्रेक्षक के सापेक्ष ध्वनि का वेग $(v + v_0)$ होता है।

▶ ***उदाहरण 15.7 :*** कोई रॉकेट 200 m s^{-1} की चाल से किसी लक्ष्य की ओर गतिमान है । गति करते समय यह 1000 Hz आवृत्ति की तरंग उत्सर्जित करता है । इस ध्वनि का कुछ भाग लक्ष्य पर पहुँच कर प्रतिध्वनि के रूप में वापस रॉकेट की ओर परावर्तित हो जाता है । (a) लक्ष्य द्वारा संसूचित ध्वनि की आवृत्ति, तथा (b) रॉकेट द्वारा संसूचित प्रतिध्वनि की आवृत्ति परिकलित कीजिए ।

हल : (a) इस प्रश्न में प्रेक्षक स्थिर है तथा स्रोत प्रेक्षक की ओर 200 m s^{-1} चाल से गतिशील है, क्योंकि यह वेग, ध्वनि वेग (= 330 ms^{-1}) के साथ तुलनीय है। अतः हम यहाँ समीकरण (15.50) का उपयोग करेंगे न कि सन्निकट समीकरण (15.51) का। यहाँ क्योंकि स्रोत स्थिर लक्ष्य की ओर चल रहा है v_s के स्थान पर $(-v_s)$ प्रतिस्थापित करेंगे। इस प्रकार समीकरण (15.50) से

$$\nu = \nu_0\left(1-\frac{v_s}{v}\right)^{-1}$$

$$= 1000\text{ Hz}\left(1-\frac{200\text{ m s}^{-1}}{330\text{ m s}^{-1}}\right)^{-1}$$

$$= 2540\text{ Hz}$$

(b) यहाँ इस प्रश्न में अब लक्ष्य स्रोत है (क्योंकि यह प्रतिध्वनि का स्रोत है) तथा रॉकेट का संसूचक अब एक संसूचक अथवा प्रेक्षक (क्योंकि यह संसूचन भी करता है) है । अतः $v_s = 0$ एवं v_0 का मान धनात्मक है। अब स्रोत (लक्ष्य) द्वारा उत्सर्जित ध्वनि की आवृत्ति ν है जो कि लक्ष्य द्वारा अवरुद्ध आवृत्ति है । यहाँ हम स्रोत की मूल आवृत्ति ν_0 का उपयोग नहीं कर सकते । अतः रॉकेट से जुड़े संसूचक द्वारा रिकार्ड की गई आवृत्ति

$$\nu' = \nu\left(\frac{v+v_0}{v}\right)$$

$$= 2540\text{ Hz}\left(\frac{200\text{ m s}^{-1} + 330\text{ m s}^{-1}}{300\text{ m s}^{-1}}\right)$$

$$= 4080\text{ Hz}$$

◀

सारांश

1. *यांत्रिक तरंगें* द्रव्यात्मक माध्यमों में विद्यमान रह सकती हैं तथा ये न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं ।
2. *अनुप्रस्थ तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं ।
3. *अनुदैर्घ्य तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं ।
4. *प्रगामी तरंग* वह तरंग होती है जो माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है ।
5. धनात्मक x-दिशा में संचरित ज्यावक्रीय तरंग का *विस्थापन* इस प्रकार व्यक्त किया जाता है–

   $$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi)$$

   यहाँ a तरंग का आयाम, k कोणीय तरंग संख्या, ω कोणीय आवृत्ति, $(kx - \omega t + \phi)$ कला, तथा ϕ कला-नियतांक अथवा प्रारंभिक कला कोण है ।
6. किसी प्रगामी तरंग का तरंगदैर्घ्य λ, उसके किन्हीं ऐसे दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी के बराबर होती है जो किसी क्षण पर समान कला में होते हैं । अप्रगामी तरंगों के लिए यह दो क्रमागत निस्पंदों अथवा प्रस्पंदों के बीच की दूरी के दोगुने के बराबर होती है ।
7. किसी तरंग के *आवर्तकाल* T को उस समय द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसमें माध्यम का कोई अवयव अपना एक दोलन पूर्ण करता है । यह तरंग की कोणीय आवृत्ति ω से इस प्रकार संबंधित होता है

   $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
8. किसी तरंग की *आवृत्ति* ν को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति व कोणीय आवृत्ति में निम्नलिखित संबंध होता है :

   $$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

9. प्रगामी तरंग की *चाल* $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$

10. किसी तानित डोरी पर *अनुप्रस्थ तरंग की चाल* उस डोरी के गुणों से निर्धारित होती है । यदि किसी डोरी में तनाव T है तथा डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है तो उस डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

11. *ध्वनि तरंगें* अनुदैर्घ्य यांत्रिक तरंगें होती हैं जो ठोसों, द्रवों तथा गैसों में गमन कर सकती हैं । यदि किसी माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B तथा घनत्व ρ है तो उस माध्यम में ध्वनि तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

धातु की छड़ में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

किसी गैस में, चूँकि $B = \gamma P$, अतः ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात ($\gamma = C_p/C_v$), ρ गैस का घनत्व तथा P गैस का दाब है ।

12. जब दो या अधिक तरंगें किसी माध्यम से गमन करती हैं, तब माध्यम के किसी अवयव का विस्थापन प्रत्येक तरंग के विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है । इसे तरंगों के *अध्यारोपण का सिद्धांत* कहते हैं ।

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(x - vt)$$

13. एक ही डोरी पर गमन करती दो ज्यावक्रीय तरंगें अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार संकलन अथवा निरसन द्वारा व्यतिकरण की परिघटना प्रदर्शित करती हैं । यदि समान आयाम a तथा समान आवृत्ति वाली परंतु कला में कला-नियतांक ϕ के अंतर वाली दो तरंगें एक ही दिशा में गतिमान हैं तो उनके व्यतिकरण का परिणाम एक एकल तरंग होती हैं जिसकी आवृत्ति भी उनके समान होती है :

$$y(x,t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)$$

यदि $\phi = 0$ अथवा 2π का पूर्णांक गुणज हो तो तरंगें एकदम समान कला में होती हैं तथा व्यतिकरण संपोषी होता है; यदि $\phi = \pi$ अथवा π रेडियन का विषम गुणज हो तो तरंगें एकदम विपरीत कलाओं में होती है तथा व्यतिकरण विनाशी होता है ।

14. किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।

किसी आपतित तरंग के लिए

$$y_i\,(x, t) = a \sin\,(kx - \omega t)$$

दृढ़ परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$$y_r\,(x, t) = -\,a \sin\,(kx + \omega t)$$

खुली परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$$y_r\ (x, t) = a \sin (kx + \omega t)$$

15. विपरीत दिशाओं में गतिशील दो सर्वसम तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं । दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में उत्पन्न अप्रगामी तरंगों को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$y\ (x, t) = [2\ a \sin kx] \cos \omega t$$

अप्रगामी तरंगों का एक अभिलक्षण यह है कि इनमें शून्य विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें निस्पंद कहते हैं तथा अधिकतम विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें प्रस्पंद कहते हैं, होती हैं । दो क्रमागत निस्पंदों अथवा दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है ।

L लंबाई की तानित डोरी जो दोनों सिरों पर परिबद्ध हो, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करती है :

$$\nu = n\frac{v}{2L},\ n = 1, 2, 3....$$

यहाँ v तरंग की डोरी पर गमन की चाल है । इस संबंध से प्राप्त आवृत्तियों को सेट निकाय के कंपन अथवा दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* कहते है । निम्नतम आवृत्ति से दोलन की विधा *मूल विधा* अथवा *प्रथम गुणावृत्ति* कहलाती है । $n = 2$ की दोलन विधा को *द्वितीय गुणावृत्ति* कहते हैं, और इसी प्रकार क्रम बढ़ता जाता है ।

L लंबाई की कोई नली जिसका एक सिरा बंद तथा दूसरा सिरा खुला हो, जैसे वायु–कॉलम, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करता है :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L},\ n = 0, 1, 2, 3....$$

उपरोक्त संबंध द्वारा निरूपित आवृत्तियों का सेट इस प्रकार के निकाय के दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* होती हैं । इस संबंध द्वारा $n = 0$ के लिए प्राप्त निम्नतम आवृत्ति $v/4L$ है, जो इस प्रकार के निकाय की मूल विधा अथवा प्रथम गुणावृत्ति होती है।

16. दोनों सिरों से परिबद्ध L लंबाई की तानित डोरी अथवा एक सिरे से बंद तथा दूसरे सिरे पर मुक्त वायु–कॉलम जिन आवृत्तियों से कंपन करते हैं उन्हें इन निकायों की प्रसामान्य विधाएँ कहते हैं । इनमें से प्रत्येक आवृत्ति निकाय की *अनुनाद आवृत्ति* होती है।

17. *विस्पंद* तब उत्पन्न होते हैं जब बहुत कम अंतर की दो आवृत्तियों ν_1 तथा ν_2 की तरंगें एक साथ संसूचित की जाती हैं। विस्पंद आवृत्ति इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

18. माध्यम के सापेक्ष ध्वनि स्रोत अथवा प्रेक्षक O की गति के कारण किसी तरंग की प्रेक्षित आवृत्ति में परिवर्तन होना *डॉप्लर प्रभाव* कहलाता है। ध्वनि के लिए प्रेक्षित आवृत्ति को ध्वनि स्रोत की आवृत्ति ν_0 के पदों में व्यक्त किया जाता है

$$\nu = \nu_0\left[\frac{v + v_0}{v + v_s}\right]$$

यहाँ v माध्यम में ध्वनि की चाल, v_0 माध्यम के सापेक्ष प्रेक्षक की चाल तथा v_s माध्यम के सापेक्ष ध्वनि-स्रोत का वेग है। इस सूत्र का उपयोग करते समय, OS की दिशा में वेग धनात्मक और विपरीत दिशा में ऋणात्मक लिए जाएँगे।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
तरंगदैर्घ्य	λ	[L]	m	एक ही क्षण पर समान कला के दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी
संचरण नियतांक	k	[L^{-1}]	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
तरंग चाल	υ	[LT^{-1}]	m s^{-1}	$\upsilon = \nu\lambda$
विस्पंद आवृत्ति	ν_{beat}	[T^{-1}]	s^{-1}	दो निकट आवृत्तियों की अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों का अंतर

विचारणीय विषय

1. तरंग किसी माध्यम में समूचे द्रव्य की गति नहीं है । पवन वायु में ध्वनि तरंग से भिन्न होती है । पवन में एक स्थान से दूसरे स्थान तक वायु की गति सम्मिलित होती है । ध्वनि तरंग में वायु की परतों का संपीडन तथा विरलन सम्मिलित होता है ।
2. तरंग में एक स्थान से दूसरे स्थान तक ऊर्जा स्थानांतरित होती है न कि द्रव्य ।
3. माध्यम के निकटतम दोलनी भागों के बीच आद्योपांत (शुरू से अंत तक) प्रत्यास्थ बलों के युग्मन के कारण ऊर्जा स्थानांतरण होता है ।
4. अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों में हो सकता है जिनमें अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक हो, उदाहरणार्थ ठोस। अनुदैर्घ्य तरंगों को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की आवश्यकता होती है, अत: ये तरंगें सभी माध्यमों-ठोस, द्रव तथा गैस में संभव होती हैं ।
5. दी गई आवृत्ति की किसी सरल आवर्त प्रगामी तरंग में सभी कणों का आयाम समान होता है, परंतु किसी दिए गए नियत समय पर उनकी कलाएँ भिन्न होती हैं । किसी अप्रगामी तरंग में किसी निश्चित क्षण पर सभी कणों की कलाएँ समान होती हैं परंतु उनके आयाम भिन्न होते हैं ।
6. किसी माध्यम में विराम की स्थिति वाले प्रेक्षक के सापेक्ष उस माध्यम में किसी यांत्रिक तरंग की चाल (υ) केवल माध्यम के प्रत्यास्थ तथा अन्य गुणों (जैसे द्रव्यमान घनत्व) पर निर्भर करती है । यह ध्वनि-स्रोत के वेग पर निर्भर नहीं करती ।
7. माध्यम के सापेक्ष υ_0 वेग से गतिशील किसी प्रेक्षक के लिए प्रत्यक्ष रूप से तरंग की चाल υ से भिन्न होती है तथा यह चाल $\upsilon \pm \upsilon_0$ होती है ।

अभ्यास

15.1 2.50 kg द्रव्यमान की 20 cm लंबी तानित डोरी पर 200 N बल का तनाव है । यदि इस डोरी के एक सिरे को अनुप्रस्थ झटका दिया जाए तो उत्पन्न विक्षोभ कितने समय में दूसरे सिरे तक पहुँचेगा ?

15.2 300 m ऊँची मीनार के शीर्ष से गिराया गया पत्थर मीनार के आधार पर बने तालाब के पानी से टकराता है । यदि वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है तो पत्थर के टकराने की ध्वनि मीनार के शीर्ष पर पत्थर गिराने के कितनी देर बाद सुनाई देगी ? (g = 9.8 m s^{-2})

15.3 12.0 m लंबे स्टील के तार का द्रव्यमान 2.10 kg है । तार में तनाव कितना होना चाहिए ताकि उस तार पर किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल 20 C पर शुष्क वायु में ध्वनि की चाल (343 m s^{-1}) के बराबर हो ।

15.4 सूत्र $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma\ P}{r}}$ का उपयोग करके स्पष्ट कीजिए कि वायु में ध्वनि की चाल क्यों

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती,

(b) ताप के साथ बढ़ जाती है, तथा

(c) आर्द्रता के साथ बढ़ जाती है ?

15.5 आपने यह सीखा है कि एक विमा में कोई प्रगामी तरंग फलन $y = f(x, t)$ द्वारा निरूपित की जाती है जिसमें x तथा t को $x - \upsilon t$ अथवा $x + \upsilon t$ अर्थात् $y = f(x \pm \upsilon t)$ संयोजन में प्रकट होना चाहिए । क्या इसका प्रतिलोम भी सत्य है ?

नीचे दिए गए y के प्रत्येक फलन का परीक्षण करके यह बताइए कि वह किसी प्रगामी तरंग को निरूपित कर सकता है:

(a) $(x - vt)^2$

(b) $\log [(x+vt)/x_0]$

(c) $1/(x + vt)$

15.6 कोई चमगादड़ वायु में 1000 k Hz आवृत्ति की पराश्रव्य ध्वनि उत्सर्जित करता है । यदि यह ध्वनि जल के पृष्ठ से टकराती है, तो (a) परावर्तित ध्वनि तथा (b) पारगमित ध्वनि की तरंगदैर्घ्य ज्ञात कीजिए । वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमश: 340 m s^{-1} तथा 1486 m s^{-1} है ।

15.7 किसी अस्पताल में ऊतकों में ट्यूमरों का पता लगाने के लिए पराश्रव्य स्कैनर का प्रयोग किया जाता है । उस ऊतक में ध्वनि में तरंगदैर्घ्य कितनी है जिसमें ध्वनि की चाल 1.7 k m s^{-1} है ? स्कैनर की प्रचालन आवृत्ति 4.2 MHz है ।

15.8 किसी डोरी पर कोई अनुप्रस्थ गुणावृत्ति तरंग का वर्णन

$$y\ (x,\ t) = 3.0 \sin\ (36\ t + 0.018\ x + \pi/4)$$

द्वारा किया जाता है । यहाँ x तथा y सेंटीमीटर में तथा t सेकंड में है । x की धनात्मक दिशा बाएँ से दाएँ है ।

(a) क्या यह प्रगामी तरंग है अथवा अप्रगामी ? यदि यह प्रगामी तरंग है तो इसकी चाल तथा संचरण की दिशा क्या है ?

(b) इसका आयाम तथा आवृत्ति क्या है ?

(c) उद्गम के समय इसकी आरंभिक कला क्या है ?

(d) इस तरंग में दो क्रमागत शिखरों के बीच की न्यूनतम दूरी क्या है ?

15.9 प्रश्न 15.8 में वर्णित तरंग के लिए x = 0 cm, 2 cm तथा 4 cm के लिए विस्थापन (y) और समय (t) के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए । इन ग्राफों की आकृति क्या है ? आयाम, आवृत्ति अथवा कला में से किन पहलुओं में प्रगामी तरंग में दोलनी गति एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर भिन्न है ?

15.10 प्रगामी गुणावृत्ति तरंग

$$y\ (x,\ t) = 2.0 \cos 2\pi\ (10\ t - 0.0080\ x + 0.35)$$

जिसमें x तथा y को m में तथा t को s में लिया गया है, के लिए उन दो दोलनी बिंदुओं के बीच कलांतर कितना है जिनके बीच की दूरी है

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\lambda/2$

(d) $\dfrac{3\lambda}{4}$

15.11 दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी पर अनुप्रस्थ विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया गया है

$$y(x,\ t) = 0.06 \sin \left(\frac{2\pi}{3} x\right) \cos\ (120\ \pi\ t)$$

जिसमें x तथा y को m तथा t को s में लिया गया है । इसमें डोरी की लंबाई 1.5 m है जिसकी संहति 3.0 10^{-2} kg है । निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) यह फलन प्रगामी तरंग अथवा अप्रगामी तरंग में से किसे निरूपित करता है ?

(b) इसकी व्याख्या विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के रूप में करते हुए प्रत्येक तरंग की तरंगदैर्घ्य, आवृत्ति तथा चाल ज्ञात कीजिए ।

(c) डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए ।

15.12 (i) प्रश्न 15.11 में वर्णित डोरी पर तरंग के लिए बताइए कि क्या डोरी के सभी बिंदु समान (a) आवृत्ति, (b) कला, (c) आयाम से कंपन करते हैं ? अपने उत्तरों को स्पष्ट कीजिए ।

(ii) एक सिरे से 0.375 m दूर के बिंदु का आयाम कितना है ?

15.13 नीचे किसी प्रत्यास्थ तरंग (अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्घ्य) के विस्थापन को निरूपित करने वाले x तथा t के फलन दिए गए हैं । यह बताइए कि इनमें से कौन (i) प्रगामी तरंग को, (ii) अप्रगामी तरंग को, (iii) इनमें से किसी भी तरंग को नहीं निरूपित करता है

(a) $y = 2 \cos (3x) \sin 10\, t$

(b) $y = 2\sqrt{x - v\,t}$

(c) $y = 3 \sin (5x - 0.5\, t) + 4 \cos (5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 दो दृढ़ टेकों के बीच तानित तार अपनी मूल विधा में 45 Hz आवृत्ति से कंपन करता है। इस तार का द्रव्यमान $3.5 \quad 10^{-2}$ kg तथा रैखिक द्रव्यमान घनत्व $4.0 \quad 10^{-2}$ kg m^{-1} है। (a) तार पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल क्या है, तथा (b) तार में तनाव कितना है ?

15.15 एक सिरे पर खुली तथा दूसरे सिरे पर चलायमान पिस्टन लगी 1 m लंबी नलिका, किसी नियत आवृत्ति के स्रोत (340 Hz आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज) के साथ, जब नलिका में वायु कॉलम 25.5 cm अथवा 79.3 cm होता है तब अनुनाद दर्शाती है। प्रयोगशाला के ताप पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए। कोर-प्रभाव को नगण्य मान सकते हैं।

15.16 100 cm लंबी स्टील-छड़ अपने मध्य बिंदु पर परिबद्ध है। इसके अनुदैर्घ्य कंपनों की मूल आवृत्ति 2.53 kHz है। स्टील में ध्वनि की चाल क्या है ?

15.17 20 cm लंबाई के पाइप का एक सिरा बंद है। 430 Hz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा अनुनाद द्वारा उत्तेजित की जाती है ? यदि इस पाइप के दोनों सिरे खुले हों तो भी क्या यह स्रोत इस पाइप के साथ अनुनाद करेगा ? वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है।

15.18 सितार की दो डोरियाँ A तथा B एक साथ 'गा' स्वर बजा रही हैं तथा थोड़ी-सी बेसुरी होने के कारण 6 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी A का तनाव कुछ घटाने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की मूल आवृत्ति 324 Hz है तो B की आवृत्ति क्या है ?

15.19 स्पष्ट कीजिए क्यों (अथवा कैसे) :

(a) किसी ध्वनि तरंग में विस्थापन निस्पंद दाब प्रस्पंद होता है और विस्थापन प्रस्पंद दाब निस्पंद होता है।

(b) आँख न होने पर भी चमगादड़ अवरोधकों की दूरी, दिशा, प्रकृति तथा आकार सुनिश्चित कर लेते है।

(c) वायलिन तथा सितार के स्वरों की आवृत्तियाँ समान होने पर भी हम दोनों से उत्पन्न स्वरों में भेद कर लेते हैं।

(d) ठोस अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगों का पोषण कर सकते हैं जबकि गैसों में केवल अनुदैर्घ्य तरंगें ही संचरित हो सकती हैं, तथा

(e) परिक्षेपी माध्यम में संचरण के समय स्पंद की आकृति विकृत हो जाती है।

15.20 रेलवे स्टेशन के बाह्य सिगनल पर खड़ी कोई रेलगाड़ी शांत वायु में 400 Hz आवृत्ति की सीटी बजाती है। (i) प्लेटफॉर्म पर खड़े प्रेक्षक के लिए सीटी की आवृत्ति क्या होगी जबकि रेलगाड़ी (a) 10 m s^{-1} चाल से प्लेटफॉर्म की ओर गतिशील है, तथा (b) 10 m s^{-1} चाल से प्लेटफॉर्म से दूर जा रही है ? (ii) दोनों ही प्रकरणों में ध्वनि की चाल क्या है ? शांत वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} लीजिए।

15.21 स्टेशन यार्ड में खड़ी कोई रेलगाड़ी शांत वायु में 400 Hz आवृत्ति की सीटी बजा रही है। तभी 10 m s^{-1} चाल से यार्ड से स्टेशन की ओर वायु बहने लगती है। स्टेशन के प्लेटफॉर्म पर खड़े किसी प्रेक्षक के लिए ध्वनि की आवृत्ति, तरंगदैर्घ्य तथा चाल क्या हैं ? क्या यह स्थिति तथ्यत: उस स्थिति के समरूप है जिसमें वायु शांत हो तथा प्रेक्षक 10 m s^{-1} चाल से यार्ड की ओर दौड़ रहा हो ? शांत वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} ले सकते हैं।

अतिरिक्त अभ्यास

15.22 किसी डोरी पर कोई प्रगामी गुणावृत्ति तरंग इस प्रकार व्यक्त की गई है

$$y\,(x,\, t) = 7.5 \sin (0.0050\, x + 12\, t + \pi/4)$$

(a) $x = 1$ cm तथा $t = 1$ s पर किसी बिंदु का विस्थापन तथा दोलन की चाल ज्ञात कीजिए। क्या यह चाल तरंग संचरण की चाल के बराबर है ?

(b) डोरी के उन बिंदुओं की अवस्थिति ज्ञात कीजिए जिनका अनुप्रस्थ विस्थापन तथा चाल उतनी ही है जितनी $x = 1$ cm पर स्थित बिंदु की समय $t = 2$ s, 5 s तथा 11 s पर है।

15.23 ध्वनि का कोई सीमित स्पंद (उदाहरणार्थ सीटी की 'पिप') माध्यम में भेजा जाता है। (a) क्या इस स्पंद की कोई निश्चित (i) आवृत्ति, (ii) तरंगदैर्घ्य, (iii) संचरण की चाल है ? (b) यदि स्पंद दर 1 स्पंद प्रति 20 सेकंड है अर्थात् सीटी प्रत्येक

20 s के पश्चात् सेकंड के कुछ अंश के लिए बजती है, तो सीटी द्वारा उत्पन्न स्वर की आवृत्ति (1/20) Hz अथवा 0.05 Hz है ?

15.24 8.0 10^{-3} kg m^{-1} रैखिक द्रव्यमान घनत्व की किसी लंबी डोरी का एक सिरा 256 Hz आवृत्ति के विद्युत चालित स्वरित्र द्विभुज से जुड़ा है। डोरी का दूसरा सिरा किसी स्थिर घिरनी के ऊपर गुजरता हुआ किसी तुला के पलड़े से बँधा है जिस पर 90 kg के बाट लटके हैं। घिरनी वाला सिरा सारी आवक ऊर्जा को अवशोषित कर लेता है जिसके कारण इस सिरे से परावर्तित तरंगों का आयाम नगण्य होता है। $t = 0$ पर डोरी के बाएँ सिरे (द्विभुज वाले सिरे) $x = 0$ पर अनुप्रस्थ विस्थापन शून्य है ($y = 0$) तथा वह y की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील है। तरंग का आयाम 5.0 cm है। डोरी पर इस तरंग का वर्णन करने वाले अनुप्रस्थ विस्थापन y को x तथा t के फलन के रूप में लिखिए।

15.25 किसी पनडुब्बी से आबद्ध कोई 'सोनार' निकाय 40.0 kHz आवृत्ति पर प्रचालन करता है। कोई शत्रु-पनडुब्बी 360 km h^{-1} चाल से इस सोनार की ओर गति करती है। पनडुब्बी से परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या है? जल में ध्वनि की चाल 1450 m s^{-1} लीजिए।

15.26 भूकंप पृथ्वी के भीतर तरंगें उत्पन्न करते हैं। गैसों के विपरीत, पृथ्वी अनुप्रस्थ (S) तथा अनुदैर्घ्य (P) दोनों प्रकार की तरंगों की अनुभूति कर सकती है। S तरंगों की प्रतिरूपी चाल लगभग 4.0 km s^{-1}, तथा P तरंगों की प्रतिरूपी चाल लगभग 8.0 km s^{-1} है। कोई भूकंप-लेखी किसी भूकंप की P तथा S तरंगों को रिकार्ड करता है। पहली P तरंग पहली S तरंग की तुलना में 4 मिनट पहले पहुँचती है। यह मानते हुए कि तरंगें सरल रेखा में गमन करती हैं यह ज्ञात कीजिए कि भूकंप घटित होने वाले स्थान की दूरी क्या है।

15.27 कोई चमगादड़ किसी गुफा में फड़फड़ाते हुए पराश्रव्य ध्वनि उत्पन्न करते हुए उड़ रहा है। मान लीजिए चमगादड़ द्वारा उत्सर्जित पराश्रव्य ध्वनि की आवृत्ति 40 kHz है। किसी दीवार की ओर सीधा तीव्र झपट्टा मारते समय चमगादड़ की चाल ध्वनि की चाल की 0.03 गुनी है। चमगादड़ द्वारा सुनी गई दीवार से परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या है ?