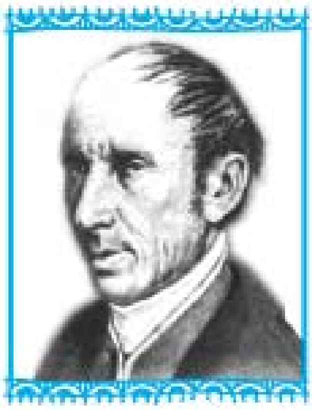
अध्याय **8**

समाकलनों के अनुप्रयोग (Application of Integrals)

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

8.1 भूमिका (Introduction)



A.L. Cauchy
(1789-1857)

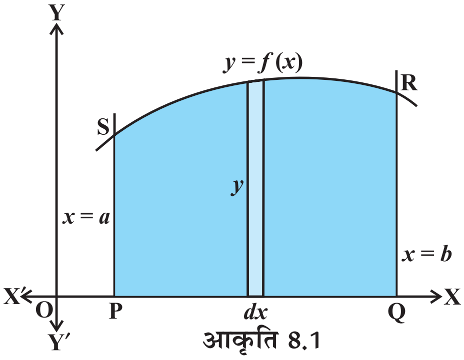
ज्यामिति में, हमने त्रिभुजों आयतों, समलंब चतुर्भुजों एवं वृत्तों सहित विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल के परिकलन के लिए सूत्रों का अध्ययन किया है। वास्तविक जीवन की अनेक समस्याओं के लिए गणित के अनुप्रयोग में इस प्रकार के सूत्र मूल होते हैं। प्रारंभिक ज्यामिति के सूत्रों की सहायता से हम अनेक साधारण आकृतियों के क्षेत्रफल का परिकलन कर सकते हैं। यद्यपि ये सूत्र वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्रफल के परिकलन के लिए अपर्याप्त हैं इसके लिए हमें समाकलन गणित की कुछ संकल्पनाओं की आवश्यकता होगी।

पिछले अध्याय में हमने योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलनों का परिकलन करते समय वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a, x = b$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने का अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम साधारण वक्रों के अंतर्गत, सरल रेखाओं एवं वृत्तों, परवलयों, तथा दीघवृत्तों (केवल मानक रूप) की चापों के बीच घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए समाकलनों के एक विशिष्ट अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे। उपरोक्त वक्रों से घिरे क्षेत्रफल को भी ज्ञात करेंगे।

8.2 साधारण वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल (Area Under Simple Curves)

पिछले अध्याय में हमने, योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन एवं कलन की आधारभूत प्रमेय का उपयोग करते हुए निश्चित समाकलन का परिकलन कैसे किया जाए, का अध्ययन किया है। अब हम वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं कोटियाँ $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने

की आसान एवं अंतर्ज्ञान से प्राप्त विधि की चर्चा करते हैं। आकृति 8.1 से हम वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल को बहुत सी पतली एवं उर्ध्वाधर बहुत सी पट्टियों से निर्मित मान सकते हैं। y उँचाई एवं dx चौड़ाई वाली एक स्वेच्छ पट्टी पर विचार कीजिए, इसमें dA (प्रारंभिक पट्टी का क्षेत्रफल) $= ydx$, जहाँ $y = f(x)$ है।



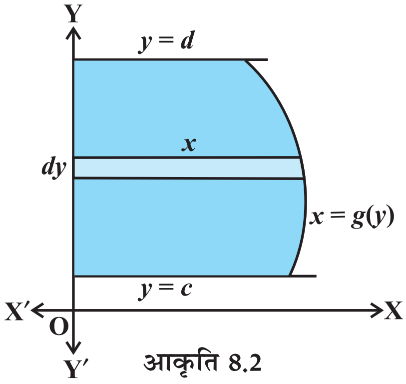
आकृति 8.1

यह क्षेत्रफल प्रारंभिक क्षेत्रफल कहलाता है जो कि क्षेत्र के भीतर किसी स्वेच्छ स्थिति पर स्थापित है एवं a तथा b के मध्य x के किसी मान से विनिर्दिष्ट है। वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a$, $x = b$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र के कुल क्षेत्रफल A को, क्षेत्र PQRSP में सभी पतली पट्टियों के क्षेत्रफलों के योगफल के परिणाम के रूप में देख सकते हैं। सांकेतिक भाषा में हम इसे इस प्रकार अभिव्यक्त करते हैं:

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\, dx$$

वक्र $x = g(y)$, y-अक्ष एवं रेखाएँ $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाता है।

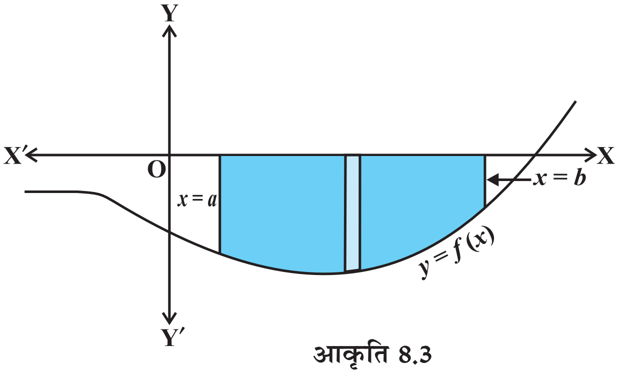
$$A = \int_c^d xdy = \int_c^d g(y)\, dy$$



आकृति 8.2

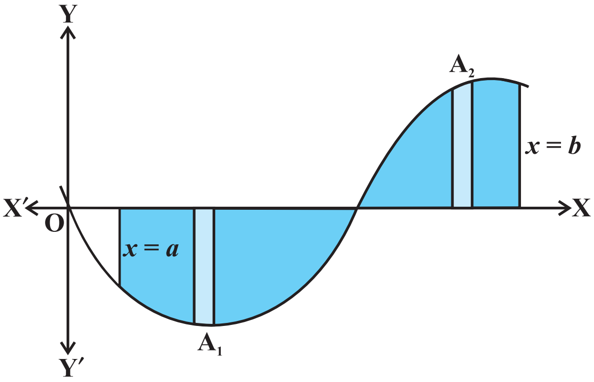
यहाँ हम क्षैतिज पट्टियों पर विचार करते हैं जैसा कि आकृति 8.2 में दर्शाया गया है।

टिप्पणी यदि चर्चित वक्र की स्थिति x-अक्ष के नीचे है, तो जैसा कि आकृति 8.3 में दर्शाया गया है, जहाँ $x = a$ से $x = b$ तक $f(x) < 0$ इसलिए दिए हुए वक्र, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$, $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ऋणात्मक हो जाता है, परंतु हम क्षेत्रफल के केवल संख्यात्मक मान की ही चर्चा करते हैं। इसलिए यदि क्षेत्रफल ऋणात्मक है तो हम इसके निरपेक्ष मान, अर्थात् $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ को लेते हैं।



आकृति 8.3

सामान्यत: ऐसा हो सकता है कि वक्र का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर है तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे है, जैसा कि आकृति 8.4 में दर्शाया गया है। यहाँ $A_1 < 0$ तथा $A_2 > 0$ है, इसलिए वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A सूत्र $A = |A_1| + A_2$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



आकृति 8.4

उदाहरण 1 वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.5 में दिए हुए वृत्त से घिरे हुए क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

$= 4$ (दिए हुए वक्र, x-अक्ष एवं कोटियों $x = 0$ तथा $x = a$ से घिरे क्षेत्र AOBA का क्षेत्रफल)

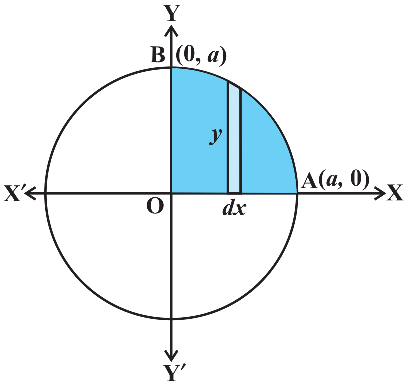
[क्योंकि वृत्त x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों के परित: सममित है]

$$= 4\int_0^a y\,dx \text{ (उर्ध्वाधर पट्टियाँ लेते हुए)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

क्योंकि $x^2 + y^2 = a^2$ से $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ प्राप्त होता है।

जैसा कि क्षेत्र AOBA प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित है इसलिए y को धनात्मक लिया जाता है। समाकलन करने पर दिए हुए वृत्त से घिरा क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:



आकृति 8.5

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$

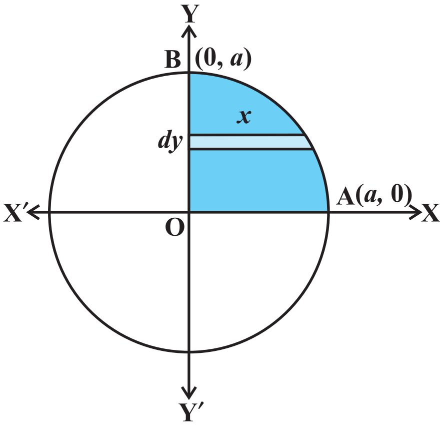
विकल्पत: जैसा कि आकृति 8.6 में दर्शाया गया है क्षैतिज पट्टियों की चर्चा करते हुए वृत्त द्वारा घिरे क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a x\,dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$



आकृति 8.6

उदाहरण 2 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल का ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.7 में दीर्घवृत्त से घिरे क्षेत्र ABA′ B′ A का क्षेत्रफल

$$= 4\left(\begin{array}{l}\text{दिए हुए वक्र, } x-\text{अक्ष, कोटियों } x = 0, x = a \text{ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में}\\ \text{घिरे क्षेत्र AOBA का क्षेत्रफल}\end{array}\right)$$

(क्योंकि दीर्घवृत्त x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों के परित: सममित है)

$$= 4\int_0^a y\,dx \quad \text{(उर्ध्वाधर पट्टियाँ लेते हुए)}$$

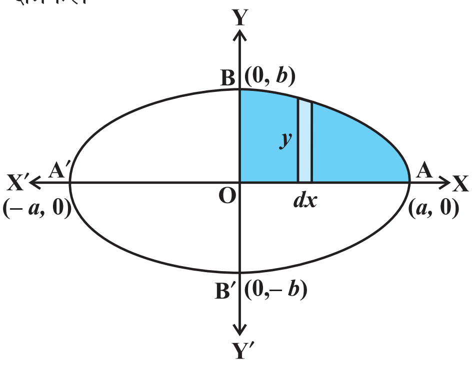
अब $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ प्राप्त होता है, परंतु क्षेत्र AOBA प्रथम चतुर्थांश में है इसलिए y धनात्मक लिया जाता है, इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ है।}$$



आकृति 8.7

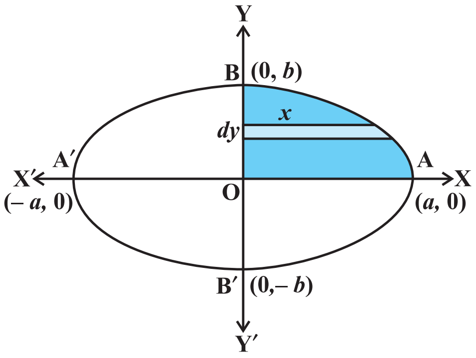
विकल्पत: जैसा कि आकृति 8.8 में दर्शाया गया है क्षैतिज पट्टियों की चर्चा करते हुए दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^b x dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2}\, dy \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0 + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ है।}$$



आकृति 8.8

8.2.1 एक वक्र एवं एक रेखा से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (*The area of the region bounded by a curve and a line*)

इस उपपरिच्छेद में, हम एक रेखा और एक वृत्त, एक रेखा और एक परवलय, तथा एक रेखा और एक दीर्घवृत्त से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे उपरोक्त चर्तित वक्रों के समीकरण केवल प्रामाणिक रूप में ही अध्ययन किए जाएँगे क्योंकि अन्य रूपों वाले समीकरण का उपयोग इस पाठ्यपुस्तक के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं।

उदाहरण 3 वक्र $y = x^2$ एवं रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

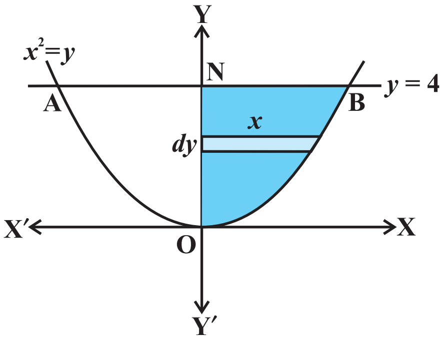
हल क्योंकि दिए हुए समीकरण $y = x^2$ द्वारा निरूपित वक्र y-अक्ष के परित: सममित एक परवलय है। इसलिए आकृति 8.9 से क्षेत्र AOBA का अभीष्ट क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:

$2\int_0^4 x dy =$ 2 (दिए हुए वक्र, y – अक्ष एवं रेखाओं $y = 0$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र BOND का क्षेत्रफल)

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}\, dy \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= 2\times\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\times 8 = \frac{32}{3}$$

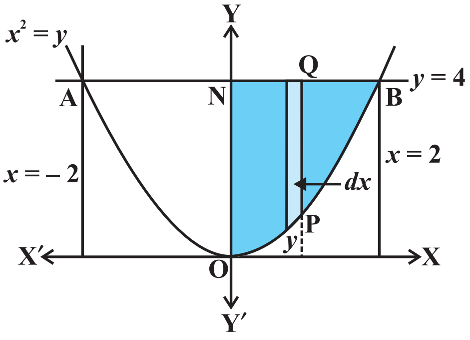
यहाँ हमने क्षैतिज पट्टियाँ ली हैं जैसा कि आकृति 8.9 में दर्शाया गया है।



आकृति 8.9

विकल्पत: क्षेत्र AOBA का क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए हम PQ जैसी ऊर्ध्वाधर पट्टियाँ ले सकते हैं जैसा कि आकृति 8.10 में दर्शाया गया है। इसके लिए हम समीकरणों $x^2 = y$ एवं $y = 4$ को हल करते हैं जिससे $x = -2$ एवं $x = 2$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार क्षेत्र AOBA को वक्रों $y = x^2$, $y = 4$ एवं कोटियों $x = -2$ तथा $x = 2$ से घिरा क्षेत्र परिभाषित किया जा सकता है।



आकृति 8.10

इसलिए क्षेत्र AOBA का क्षेत्रफल

$$= \int_{-2}^{2} y\,dx \; [y = (\text{बिंदु Q का } y \text{ निर्देशांक} - \text{बिंदु P का } y \text{ निर्देशांक}) = 4 - x^2]$$

$$= 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)\,dx \qquad (\text{क्यों?})$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[4 \times 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}$$

टिप्पणी उपरोक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम ऊर्ध्वाधर अथवा क्षैतिज पट्टियों में से किसी को भी ले सकते हैं। इससे आगे हम इन दोनों पट्टियों में से किसी एक की चर्चा करेंगे, ऊर्ध्वाधर पट्टियों को सामान्यत: अधिक प्राथमिकता दी जाएगी।

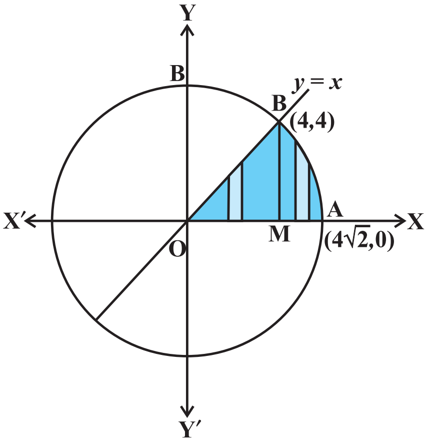
उदाहरण 4 प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$, रेखा $y = x$, एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए समीकरण हैं:

$$y = x \qquad \ldots (1)$$

और $$x^2 + y^2 = 32 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर हम पाते हैं कि दिया हुआ वृत्त एवं दी हुई रेखा एक दूसरे को प्रथम चतुर्थांश में B(4, 4) पर मिलते हैं (आकृति 8.11)। x-अक्ष के ऊपर BM लम्ब खींचिए।



आकृति 8.11

इसलिए, अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OBMO का क्षेत्रफल + क्षेत्र BMAB का क्षेत्रफल

अब, क्षेत्र OBMO का क्षेत्रफल

$$= \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8 \quad \ldots (3)$$

पुनः क्षेत्र BMAB का क्षेत्रफल

$$= \int_4^{4\sqrt{2}} y dx = \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{32-x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x\sqrt{32-x^2} + \frac{1}{2}\times 32 \times \sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} 4\sqrt{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 32\times \sin^{-1} 1\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{32-16} + \frac{1}{2}\times 32\times \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8\,\pi - (8 + 4\pi) = 4\pi - 8 \quad \ldots (4)$$

समीकरण (3) एवं (4) का योगफल ज्ञात करने पर हम अभीष्ट क्षेत्रफल $A = 4\pi$ पाते हैं।

उदाहरण 5 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं कोटियों $x = 0$ और $x = ae$, से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ एवं $e < 1$ है।

हल क्षेत्र BOB′ RFSB का अभीष्ट क्षेत्रफल दिए हुए दीर्घवृत्त एवं रेखाओं $x = 0$ तथा $x = ae$ से घिरा हुआ है (आकृति 8.12)।

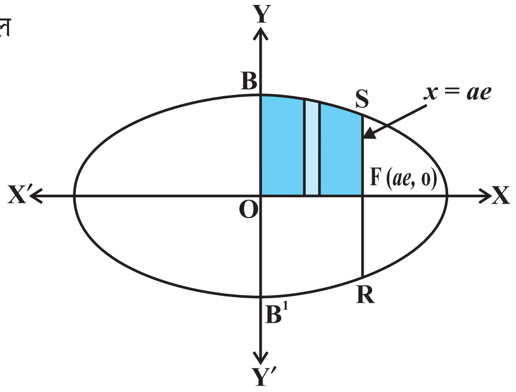
ध्यान दीजिए कि क्षेत्र BOB′ RFSB का क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^{ae} y dx = 2\frac{b}{a}\int_0^{ae}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2-a^2e^2} + a^2\sin^{-1} e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1-e^2} + \sin^{-1} e\right]$$



आकृति 8.12

प्रश्नावली 8.1

1. वक्र $y^2 = x$, रेखाओं $x = 1, x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y^2 = 9x, x = 2, x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम चतुर्थांश में $x^2 = 4y, y = 2, y = 4$ एवं y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$, रेखा $x = \sqrt{3}\,y$ एवं x-अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. छेदक रेखा $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।
9. परवलय $y = x^2$ एवं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. वक्र $x^2 = 4y$ एवं रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. वक्र $y^2 = 4x$ एवं रेखा $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12 एवं 13 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

12. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

    (A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

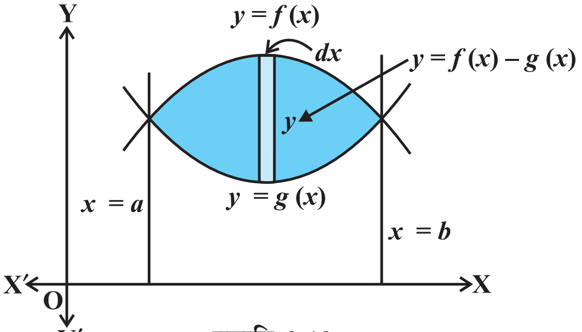
13. वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

    (A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

8.3 दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल (Area Between Two Curves)

लैबनिज़ की चेतना एवं अंतर्ज्ञान की सच्चाई के फलस्वरूप किसी क्षेत्र को प्रारंभिक क्षेत्रफल की बृहत् संख्या में पट्टियाँ काटकर और इन प्रारंभिक क्षेत्रफलों का योगफल ज्ञात कर, क्षेत्रफल के परिकलन की क्रिया समाकलन कहलाती है। कल्पना कीजिए, हमें दो वक्र $y = f(x)$ और $y = g(x)$ दिए हुए हैं जहाँ $[a, b]$में $f(x) \geq g(x)$ जैसा कि आकृति 8.13 में दर्शाया गया है। दिए हुए वक्रों के समीकरण से y का उभयनिष्ठ मान लेते हुए इन दोनों वक्रों के प्रतिच्छेदक बिंदु $x = a$ तथा $x = b$ द्वारा देय हैं।

समाकलन के सूत्र का स्थापन करने के लिए प्रारंभिक क्षेत्रफल को ऊर्ध्वाधर पट्टियों के रूप में लेना सुविधाजनक है। जैसा कि आकृति 8.13 में दर्शाया गया है। प्रारंभिक पट्टी की ऊँचाई $f(x) - g(x)$ एवं चौड़ाई dx है, इसलिए प्रारंभिक क्षेत्रफल



आकृति 8.13

$$dA = [f(x) - g(x)]\, dx, \text{ तथा कुल क्षेत्रफल } A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

विकल्पत:

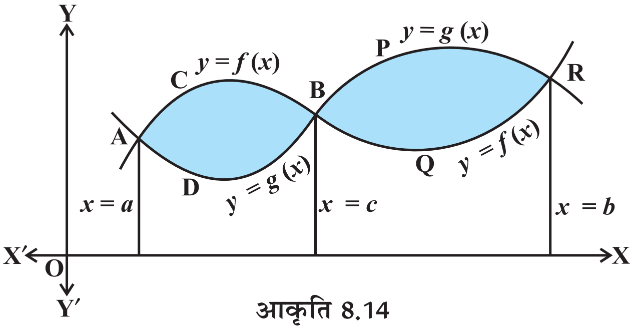
A = [वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = a, x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल]
– [वक्र $y = g(x)$, x-अक्ष एवं रेखाओं $x = a, x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल]

$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ जहाँ $[a, b]$ में $f(x) \geq g(x)$

यदि $[a, c]$ में $f(x) \geq g(x)$ तथा $[c, b]$ में $f(x) \leq g(x)$ जहाँ $a < c < b$ जैसा कि आकृति 8.14 में दर्शाया गया है, तो वक्रों से घिरे क्षेत्रों का क्षेत्रफल निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है :

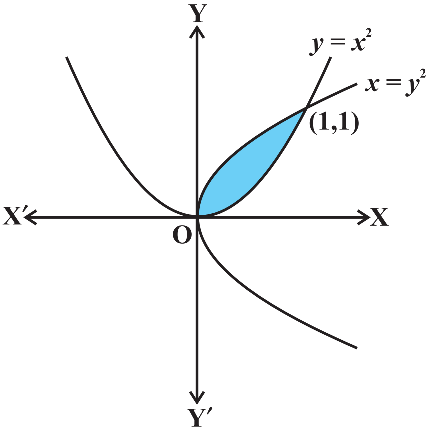
क्षेत्रफल = क्षेत्र ACBDA का क्षेत्रफल + क्षेत्र BPRQB का क्षेत्रफल

$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$$



आकृति 8.14

उदाहरण 6 दो परवलयों $y = x^2$ एवं $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.15

हल जैसा कि आकृति 8.15 में दर्शाया गया है, इन दोनों परवलयों के प्रतिच्छेदक बिंदु O (0, 0) एवं A (1, 1) है। यहाँ $y^2 = x$ अथवा $y = \sqrt{x} = f(x)$ और $y = x^2 = g(x)$, जहाँ [0, 1] में $f(x) \geq g(x)$ है।

इसलिए छायांकित क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 7 x-अक्ष के ऊपर तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ एवं परवलय $y^2 = 4x$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल वृत्त का दिया हुआ समीकरण $x^2 + y^2 = 8x$, $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। इस वृत्त का केंद्र बिंदु (4, 0) है तथा त्रिज्या 4 इकाई है। परवलय $y^2 = 4x$ के साथ इसके प्रतिच्छेद से प्राप्त होता है :

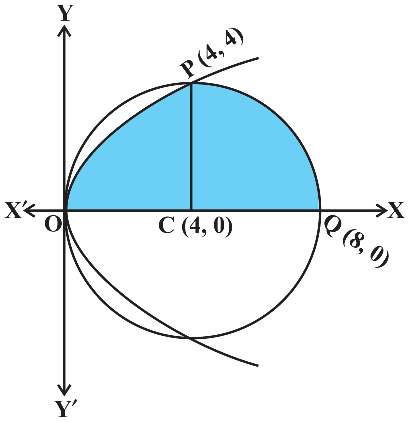
$$x^2 + 4x = 8x$$

अथवा $x^2 - 4x = 0$

अथवा $x(x - 4) = 0$

अथवा $x = 0, x = 4$

इस प्रकार इन दो वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु O(0, 0) एवं x-अक्ष से ऊपर P(4,4) हैं।



आकृति 8.16

आकृति 8.16 से x-अक्ष से उपर इन दोनों वक्रों के मध्य सम्मिलित क्षेत्र OPQCO का क्षेत्रफल

= (क्षेत्र OCPO का क्षेत्रफल) + (क्षेत्र PCQP का क्षेत्रफल)

$$= \int_0^4 y dx + \int_4^8 y dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\, dx + \int_4^8 \sqrt{4^2 - (x-4)^2}\, dx \quad \text{(क्यों?)}$$

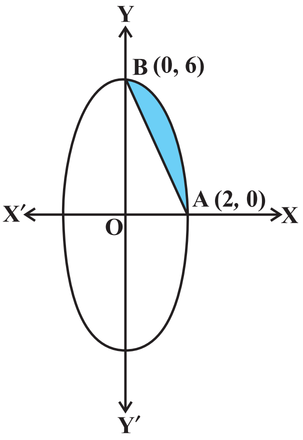
$$= 2\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 \sqrt{4^2 - t^2}\,dt, \text{ जहाँ } x - 4 = t$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{t}{2}\sqrt{4^2 - t^2} + \frac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^{-1}\frac{t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{4}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^{-1}1\right] = \frac{32}{3} + \left[0 + 8\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{32}{3} + 4\pi = \frac{4}{3}(8+3\pi)$$

उदाहरण 8 आकृति 8.17 में AOBA प्रथम चतुर्थांश में दीर्घवृत्त $9x^2 + y^2 = 36$ का एक भाग है जिसमें OA = 2 इकाई तथा OB = 6 इकाई है। लघु चाप AB एवं जीवा AB के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दीर्घवृत्त का दिया हुआ समीकरण $9x^2 + y^2 = 36$, अर्थात् $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ अथवा $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है और इसलिए इसका आकार आकृति 8.17 में दिए हुए आकार जैसा है।



आकृति 8.17

इसके अनुसार, जीवा AB का समीकरण है:

$$y - 0 = \frac{6-0}{0-2}(x-2)$$

अथवा $\quad y = -3(x-2)$

अथवा $\quad y = -3x + 6$

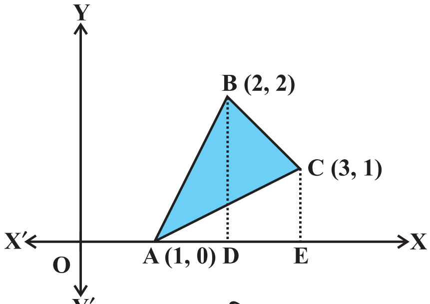
आकृति 8.17 में दर्शाये छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= 3\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2 (6-3x)\,dx \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 3\left[\frac{2}{2}\times 0 + 2\sin^{-1}(1)\right] - \left[12 - \frac{12}{2}\right] = 3\times 2\times\frac{\pi}{2} - 6 = 3\pi - 6$$

उदाहरण 9 समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 0), (2, 2) एवं (3, 1) हैं।



आकृति 8.18

हल मान लीजिए A (1, 0), B (2, 2) एवं C (3, 1) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं (आकृति 8.18)

Δ ABC का क्षेत्रफल = Δ ABD का क्षेत्रफल + समलंब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल – Δ AEC का क्षेत्रफल

अब भुजाएँ AB, BC एवं CA के समीकरण क्रमशः

$$y = 2\,(x-1),\; y = 4-x,\; y = \frac{1}{2}\,(x-1) \text{ हैं।}$$

अतः Δ ABC का क्षेत्रफल

$$= \int_1^2 2\,(x-1)\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx - \int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 + \left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3$$

$$= 2\left[\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\left[\left(4\times3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\times2-\frac{2^2}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{3}{2}$$

उदाहरण 10 दो वृत्तों $x^2+y^2=4$ एवं $(x-2)^2+y^2=4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए वृत्तों के समीकरण हैं:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \dots (1)$$

और
$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \qquad \dots (2)$$

समीकरण (1) ऐसा वृत्त है जिसका केंद्र मूल बिंदु O पर है ओर जिसकी त्रिज्या 2 इकाई है। समीकरण (2) एक ऐसा वृत्त है जिसका केंद्र C(2, O) है और जिसकी त्रिज्या 2 इकाई है। समीकरण (1) और (2) को हल करने पर हम पाते हैं:

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

अथवा
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$$

अथवा
$$x = 1 \text{ जिससे } y = \pm\sqrt{3} \text{ प्राप्त होता है।}$$

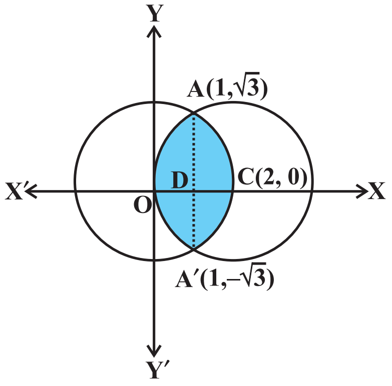
अतः दिए हुए वृत्तों के प्रतिच्छेदन बिंदु A(1, $\sqrt{3}$) और A′ (1, $-\sqrt{3}$) है, जैसा आकृति 8.19 में दर्शाया गया है।

वृत्तों के मध्यवर्ती क्षेत्र O ACA′ O का अभीष्ट

क्षेत्रफल = 2 [क्षेत्र ODCAO का क्षेत्रफल] (क्यों?)

= 2 [क्षेत्र ODAO का क्षेत्रफल + क्षेत्र DCAD का क्षेत्रफल]

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^2 y\,dx\right]$$



आकृति 8.19

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right] \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 +$$

$$2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} + 4\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - 4\sin^{-1}(-1)\right] + \left[4\sin^{-1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right) + 4\times\frac{\pi}{2}\right] + \left[4\times\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

प्रश्नावली 8.2

1. परवलय $x^2 = 4y$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. वक्रों $(x-1)^2 + y^2 = 1$ एवं $x^2 + y^2 = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्रों $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ एवं $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(-1, 0), (1, 3)$ एवं $(3, 2)$ हैं।
5. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ एवं $x = 4$ हैं।

प्रश्न 6 एवं 7 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

6. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखा $x + y = 2$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल है:

   (A) $2(\pi - 2)$ (B) $\pi - 2$ (C) $2\pi - 1$ (D) $2(\pi + 2)$

7. वक्रों $y^2 = 4x$ एवं $y = 2x$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 11 परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलंब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

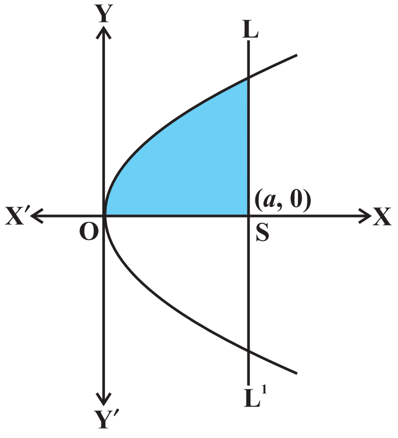
हल आकृति 8.20 से, परवलय $y^2 = 4ax$ का शीर्ष मूल बिंदु पर है। नाभिलंब जीवा LSL′ का समीकरण $x = a$ है। दिया हुआ परवलय x-अक्ष के परितः सममित है।

क्षेत्र OLL′ O का अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 (क्षेत्र OLSO का क्षेत्रफल)

$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2 \times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

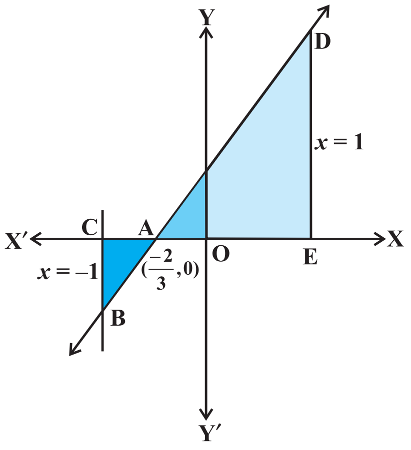
$$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2$$



आकृति 8.20

उदाहरण 12 रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल जैसा कि आकृति 8.21 में दर्शाया गया है, रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष को $x = \frac{-2}{3}$ पर मिलती है और $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ के लिए इसका आलेख x-अक्ष के नीचे है तथा $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ के लिए इसका आलेख x-अक्ष से ऊपर है।



आकृति 8.21

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र ACBA का क्षेत्रफल + क्षेत्र ADEA का क्षेत्रफल

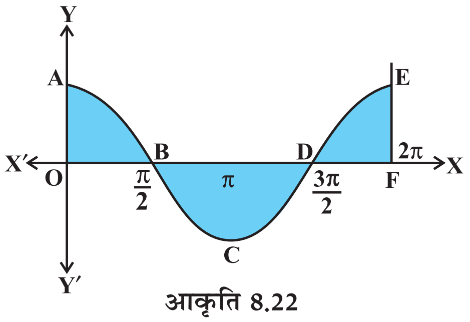
$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

उदाहरण 13 $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.22 से, अभीष्ट क्षेत्रफल

= क्षेत्र OABO का क्षेत्रफल + क्षेत्र BCDB का क्षेत्रफल + क्षेत्र DEFD का क्षेत्रफल



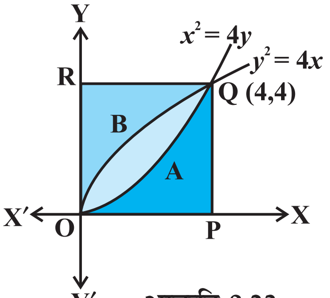
आकृति 8.22

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$, रेखाओं $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ एवं $y = 0$ से घिरे वर्ग के क्षेत्रफल को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।



आकृति 8.23

हल ध्यान दीजिए कि परवलयों $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$ के प्रतिच्छेद बिंदु (0,0) एवं (4,4) हैं जैसा कि आकृति 8.23 में दर्शाया गया है। अब वक्रों $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$ से घिरे क्षेत्र OAQBO का क्षेत्रफल

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[2 \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \qquad \ldots (1)$$

पुनः वक्रों $x^2 = 4y$, $x = 0$, $x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र OPQAO का क्षेत्रफल

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \ldots (2)$$

इसी प्रकार वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष, $y = 0$ एवं $y = 4$ से घिरे क्षेत्र OBQRO का क्षेत्रफल

$$= \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \ldots (3)$$

समीकरणों (1), (2) तथा (3) से यह निष्कर्ष निकलता है कि

क्षेत्र OAQBO का क्षेत्रफल = क्षेत्र OPQAO का क्षेत्रफल = क्षेत्र OBQRO का क्षेत्रफल

अर्थात्, परवलयों $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$ से घिरा क्षेत्रफल दिए हुए वर्ग के क्षेत्रफल को तीन बराबर भागों में विभाजित करता है।

उदाहरण 15 क्षेत्र $\{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आइए सर्वप्रथम हम उस क्षेत्र का रेखाचित्र तैयार करें जिसका हमें क्षेत्रफल ज्ञात करना है। यह क्षेत्र निम्नलिखित क्षेत्रों का मध्यवर्ती क्षेत्र है:

$A_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1\}$

$A_2 = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$

और $A_3 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\}$

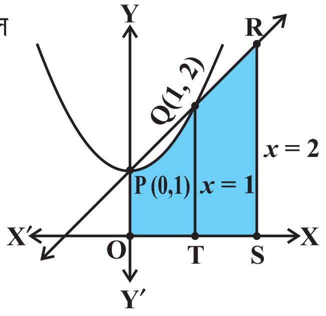
वक्रों $y = x^2 + 1$ एवं $y = x + 1$ के प्रतिच्छेद बिंदु P(0, 1) एवं Q(1, 2) हैं। आकृति 8.24 से, अभीष्ट क्षेत्र, छायांकित क्षेत्र OPQRSTO है जिसका क्षेत्रफल

= क्षेत्र OTQPO का क्षेत्रफल + क्षेत्र TSRQT का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x+1)\,dx \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right]_0^1 + \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}+1\right)-0\right] + \left[(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = \frac{23}{6}$$



आकृति 8.24

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. दिए हुए वक्रों एवं रेखाओं से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:
   (i) $y = x^2$; $x = 1$, $x = 2$ एवं x-अक्ष
   (ii) $y = x^4$; $x = 1$, $x = 5$ एव x-अक्ष
2. वक्रों $y = x$ एवं $y = x^2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित एवं $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. $y = |x+3|$ का ग्राफ़ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x+3|\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. परवलय $y^2 = 4ax$ एवं रेखा $y = mx$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. परवलय $4y = 3x^2$ एवं रेखा $2y = 3x + 12$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ एवं रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. परवलय $x^2 = y$, रेखा $y = x + 2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए वक्र $|x|+|y|=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
    [**संकेत** : आवश्यक क्षेत्र, रेखाओं $x + y = 1$, $x - y = 1$, $-x + y = 1$ एवं $-x - y = 1$ से घिरा है]
12. वक्रों $\{(x, y) : y \geq x^2$ तथा $y = |x|\}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
13. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज ABC, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A(2, 0), B (4, 5) एवं C (6, 3) हैं।

14. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, रेखाओं $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ एवं $x - 3y + 5 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x, 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16 से 20 तक प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए:

16. वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2, x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

17. वक्र $y = x\,|x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[**संकेत** : $y = x^2$ यदि $x > 0$ एवं $y = -x^2$ यदि $x < 0$]

18. क्षेत्र $y^2 \ge 6x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ में सम्मिलित क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

19. y-अक्ष, $y = \cos x$ एवं $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

सारांश

- वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं रेखाओं $x = a$ तथा $x = b$ $(b > a)$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र : क्षेत्रफल $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ है।

- वक्र $x = \phi(y)$, y-अक्ष एवं रेखाओं $y = c, y = d$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र : क्षेत्रफल $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$ है।

- दो वक्रों $y = f(x)$, $y = g(x)$ एवं रेखाएँ $x = a, x = b$ के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र द्वारा देय है ?

  क्षेत्रफल $= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, जहाँ $[a, b]$ में $f(x) \ge g(x)$

- यदि $[a, c]$ में $f(x) \ge g(x)$ एवं $[c, b]$ में $f(x) \le g(x)$, $a < c < b$, तो हम क्षेत्रफल को निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं :

  क्षेत्रफल $= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

समाकलन गणित का प्रारंभ गणित के प्रारंभिक विकास काल से ही हुआ है। यह प्राचीन यूनानी गणितज्ञों द्वारा विकसित नि:शेषता विधि पर आधारित है। इस विधि का प्रारंभ समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल और ठोस वस्तुओं के आयतन की गणना से हुआ। इस तरह से नि:शेषता विधि, समाकलन विधि की प्रारंभिक स्थिति के रूप में समझी जा सकती है। नि:शेषता विधि का सर्वोत्कृष्ट विकास प्रारंभिक काल में यूडोक्स (Eudoxus (440 ई. पू.) और आर्किमिडीज (Archimedes (300 ई. पू.) के कार्यों से प्राप्त हुआ है।

कलन के सिद्धांत का क्रमबद्ध विकास ईसा के पश्चात् 17वीं शताब्दी में हुआ। सन् 1665 में न्यूटन ने कलन पर अपना कार्य प्रवाहन सिद्धांत (Theory of fluxion) के रूप में प्रारंभ किया। उन्होंने इस सिद्धांत का प्रयोग वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्शी और वक्रता-त्रिज्या ज्ञात करने में किया। न्यूटन ने व्युत्क्रम फलन की धारणा से परिचय कराया और इसको प्रतिअवकलज (अनिश्चित समाकलन) या स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि (Inverse Method of tangents) का नामकरण किया।

1684–86, के बीच में लैवनिज़ (Leibnitz) ने एक प्रपत्र एकटा इरोडिटोरियम (Acta Eruditorum) में प्रकाशित किया और इसे कैलक्यूलस सम्मैटोरियस (Calculous Summatorius) नाम दिया, क्योंकि यह अनंत छोटे क्षेत्रफलों के योगफल से संबंधित था, वहीं पर उन्होंने इसे योगफल के प्रतीक '$\int$' द्वारा व्यक्त किया। सन् 1696 ई. में उन्होंने जे. बरनौली (J.Bernoulli) के सुझाव को मानकर अपने प्रपत्र को कैलक्यूलस इंटेग्राली (Calculus Integrali) नाम में परिवर्तित कर दिया। यह न्यूटन द्वारा स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि के संगत था।

न्यूटन और लैवनिज़ दोनों ने पूर्णत: स्वतंत्र मार्ग अपनाया जो मूलत: भिन्न थे। तथापि उन दोनों के सिद्धांतों के संगत प्रतिफल तत्सम पाए गए। लैवनिज़ ने निश्चित समाकलन की धारणा का प्रयोग किया।
यह निश्चित है कि उन्होंने ही सर्वप्रथम प्रतिअवकलज और निश्चित समाकलन के बीच के संबंध को स्पष्टतया सराहा।

निष्कर्ष यह है कि समाकलन गणित के आधारभूत धारणाओं, सिद्धांतों तथा अवकलन गणित से इसके प्रारंभिक संबंधों का विकास पी.डी. फर्मा, न्यूटन, और लैवनिज़ के कार्यों द्वारा 17वीं शताब्दी के अंत में हुआ। तथापि इसका औचित्य, सीमा की संकल्पना के आधार पर 19वीं शताब्दी के प्रारंभ में ए.एल.कोशी (A.L.Cauchy) के द्वारा किया गया। अंत में ली सोफी (Lie Sophie) का निम्नलिखित उद्धरण वर्णनीय है। "It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".